

RAPPORT DE RECHERCHE

DVDC/R/029

LC/17/DVDC/21

Juillet 2020

**Modélisation numérique 3D de
l'endommagement des chaussées par
modèle M4-5n :
fissuration & décollements d'interface**

**Développement de l'outil de calcul
et
applications**

**(ici, rapport d'étape établi en tranche 1
portant essentiellement sur la description du
formalisme M4-5n)**

Auteurs / Organisme :

Olivier Chupin, Jean-Michel Piau – Ifsttar

Site internet : www.dvdc.fr

Plateforme collaborative : www.omnispace.fr/dvdc

Président : Dominique JAUMARD

Directeurs : Eric LAYERLE et Christine LEROY

Gestion administrative et financière : IREX (www.irex.asso.fr), 9 rue de Berri 75008 PARIS, contact@irex.asso.fr

Thème de rattachement :

Thème 3. Evaluation de la durée de vie résiduelle des chaussées

Sous-thème 3.1 : Approches mécanistiques

DVDC/R/029

LC/17/DVDC/21

Juillet 2020

Sommaire

Sommaire	3
Résumé	4
Introduction	8
1. Présentation du modèle M4-5n (sans fissure)	8
1.1. Aspects géométriques	8
1.2. Champs de déplacements généralisés du M4-5n	10
1.3. Champs de déformation généralisés du M4-5n et équations de compatibilité cinématique.....	11
1.4. Champs de contraintes généralisés du M4-5n et équations d'équilibre	12
1.5. Lois de comportement du M4-5n et densités d'énergie de contrainte associées....	14
1.6. Conditions aux limites sur le contour d'une structure M4-5nW	17
2. Résolution du modèle M4-5n par méthode d'éléments finis mixte – Implémentation au sein du logiciel FreeFem++	17
2.1. Structure du problème obtenu : linéarité, bilan équations/inconnues	17
2.2. Résolution du problème par méthode d'éléments finis mixtes.....	18
2.3. Prise en compte de charges en mouvement.....	22
3. Prise en compte de fissures verticales et décollements d'interface	22
3.1. Prise en compte de fissures verticales	23
3.1.1 Aspects géométriques	24
3.1.2 Fonction d'endommagement	25
3.1.3 Vérification du fonctionnement en ouverture des fissures	26
3.2. Prise en compte de décollements d'interface.....	26
3.2.1 Conditions mécaniques sur la surface décollée	26
3.1.3 Traitement numérique retenu pour la prise en compte de conditions de décollement	27
4. Exemples d'application : impact d'une fissure verticale et/ou d'un décollement sur la déflexion de chaussée	27
4.1. Calcul de référence Alizé sur structure de chaussée neuve.....	28
4.2. Calcul avec fissure verticale.....	34
4.3. Calcul avec décollement partiel de l'interface BBSG/GB3	36
4.4. Calcul avec fissure et décollement d'interface BBSG/GB3.....	38
Conclusion -Perspectives	38
Bibliographie	39
Annexe A1 : équations complètes du M4-5n	41
A.1.1 Equations d'équilibre et conditions limites en effort	41

A.1.2 Equations de compatibilité cinématique	42
A.1.3 Lois de comportement	42
A.1.4 Densités d'énergie élastique de contrainte attachées aux lois de comportement	43
A.2 Lagrangien et formulation variationnelle associés à la résolution du M4-5n par méthode d'éléments finis mixtes	44
A.3 Typologie des solutions M4-5n en un point singulier et conditions de bord en front de fissure ou surface de décollement.....	44

Résumé

Résumé

Le thème 3 du projet DVDC porte sur le développement de modèles d'évolution de l'état structural des chaussées et sur leur application à l'estimation de la durée de vie résiduelle des chaussées, incluant la prise en compte de l'effet des travaux d'entretien.

Deux types d'approche bien distincts, pouvant s'enrichir mutuellement, sont considérés dans le thème, en fonction des échelles d'étude.

Le volet 3.2 regroupe les approches de type statistique, basées sur la formulation de lois d'évolution d'état des chaussées à l'échelle plurikilométrique des itinéraires routiers. Ces lois sont en général établies sur la base des campagnes d'auscultation des réseaux routiers.

Le volet 3.1 regroupe pour sa part les approches « mécanistiques », à échelle beaucoup plus locale (pluri-métrique), basées sur la prise en compte par modèles mécaniques des dommages se développant dans les chaussées.

Les travaux présentés ici s'inscrivent dans cet axe. Plus spécifiquement, ils portent sur l'adaptation et l'utilisation dans le contexte routier du modèle mécanique, dit M4-5n, basé sur une description à géométrie 2D, de type « empilement de plaques », des structures de chaussée¹. Le principal intérêt de ce type de modèle, qui nous a paru particulièrement adapté aux objectifs du PN DVDC réside, comme on le verra plus loin, dans sa capacité à prendre compte la présence de fissures (notamment verticales) ou de surfaces de décollement au sein des structures multicouches. Cette capacité se manifeste par deux aspects par comparaison aux approches 3D plus usuelles: d'une part l'utilisation des modèles M4-5n facilite la description géométrique des surfaces de discontinuité (fissures, décollements) ; d'autre part les valeurs des champs mécaniques du M4-5n restent bornées au voisinage des singularités

¹ *Le développement du modèle M4-5n (cf. articles listés en fin de document, « références générales sur le modèle M4-5n ») et son acronyme sont liés à l'origine à l'étude du comportement des matériaux et structures composites. M4 est l'acronyme pour « Modèle Multiparticulaire des Matériaux Multicouches ». n désigne le nombre de couches de la structure considérée et le chiffre 5 se réfère au nombre de champs cinématiques attachés à chaque couche (en l'occurrence, les 3 composantes de déplacement des plans médians des couches et les deux composantes de rotation des normales initiales à ces plans).*

géométriques, ce qui évite d'avoir à recourir aux techniques spécifiques de calcul nécessitées par la Mécanique de la Rupture (cf. méthodes de détermination des facteurs d'intensité de contrainte). Il faut bien retenir toutefois que le $M4 - 5n$ permet de modéliser des fissures se développant en milieu 3D et donc de mieux se rapprocher potentiellement des mécanismes de dégradation hétérogènes des chaussées (ex : fissures localisées en bandes de roulement) que les modélisations plus habituelles 2D, effectuées en déformation planes suivant des coupes longitudinales ou transversales de la chaussée.

Les travaux rapportés ici ont ainsi vocation à déboucher sur un outil de modélisation avancée du comportement des chaussées, que l'on espère pouvoir rendre pérenne et utile à un grand nombre de travaux futurs de recherche ou d'expertise, touchant à la Mécanique des Chaussées (interprétation à un instant donné des mesures d'auscultation et de l'état structural local des chaussées, prévisions d'évolution dans le temps de l'état structural des chaussées endommagées, évaluation de l'effet des travaux d'entretien, aide au développement de guides de dimensionnement ou de renforcement, aide au développement de technologies innovantes,...).

Sur cette voie, nos perspectives sur la durée du PN DVDC sont principalement de deux ordres : l'une est d'effectuer les développements nécessaires à la prise en compte dans l'approche M4-5n de fissures et décollements se produisant et se propageant au sein des couches de chaussée ou à leurs interfaces. L'autre est d'appliquer l'outil à l'examen d'un certain nombre de questions au cœur des problématiques du PN DVDC, telles que par exemple le mode et la cinétique de remontée de fissure dans une couche d'apport bitumineuse neuve sur support fissuré.

Le point de départ des travaux envisagés est le module spécifique de modélisation des chaussées par M4-5n, développé au sein du code aux éléments finis FreeFem++ (MFEM-Fissuroute-v0), dans le cadre de la thèse de Hanan Nasser (Nasser, Nasser et al., 2018).

A partir de là, les développements numériques à effectuer sur l'ensemble des tranches du PN sont vus en trois étapes.

La première (tranche 1) consiste à généraliser dans le module Fissuroute (MFEM-Fissuroute-v1) la technique de prise en compte de fissures verticales ou surfaces de décollement horizontales, esquissée dans la thèse de H. Nasser.

La seconde étape (tranche 2) sera de déterminer dans le cadre de l'approche M4-5n les expressions des taux de restitution d'énergie associées à la propagation des surfaces de fissuration ou décollement. On cherchera dans ces expressions à faire apparaître des quantités locales, fonction de la position des points P situés sur les contours des surfaces de fissuration ou surfaces de décollement (contours 1D). Ces quantités seront alors introduites dans des lois de Paris visant à rendre compte localement des vitesses d'avancement des points P lors d'un cycle de sollicitation (charge de trafic) (MFEM-Fissuroute-v2). Dès cette étape, ces quantités permettront de déterminer les évolutions qualitatives et quantitatives « tangentes » d'un défaut au voisinage d'un état structural donné (ex : localisation ou extension de défauts, branchement entre fissure verticale et décollement d'interface,...).

Dans une troisième étape (tranche 3), on introduira dans le module Fissuroute (MFEM-Fissuroute-v3) un processus automatique d'avancement de front (fissures ou décollements), en fonction du temps ou du nombre de cycles de chargements vus par la structure, par intégration des solutions tangentes calculées en étape 2.

Au cours de ces 3 étapes, on s'efforcera d'illustrer le travail effectué sur des exemples de calcul se reportant aux problématiques du PN.

Le présent rapport, lié à la tranche 1 de DVDC, est essentiellement un rapport d'étape.

On y décrit le travail réalisé spécifiquement au cours de cette période, portant sur la généralisation de la prise en compte de fissures ou surfaces de décollements dans le module MFEM-Fissuroute.

Mais il a surtout pour objectif celui de familiariser le lecteur avec le modèle M4-5n, à commencer par la géométrie et la description des champs de déplacements, déformations et contraintes généralisés sur lesquelles il repose.

Abstract

This report is part of the French national project, named DVDC, which focuses on the durability and maintenance of pavements. The work reported here deals more specifically with the modeling of pavement cracking and the implementation of an associated Finite Element code, called "FissuRoute", which could be assigned several objectives in the long term.

For example:

- provide assistance in the establishment of diagnoses relating to the state of damage of pavements, by providing, for example, advanced interpretations of FWD measurements;
- help predict the effect of maintenance work on the life of pavements.

The modeling technique developed here is based on "multiparticulate models" developed for multi-layer elastic media (cf. composite materials), which therefore proves to be suitable for pavement structures. The principle of these models borrows from plate theory and constitutes an extension of it in the case of multilayer structures. They thus describe the mechanical behavior of multilayers by means of "generalized" fields of displacements, deformations and stresses, depending only on the 2 variables (x, y) of horizontal planes. The z direction (vertical) is taken into account through the construction and the definition of these generalized fields and disappears in the end from the explicit variables of the model. In a certain sense, "multilayer particulate descriptions" can be considered as corresponding to "stacking of plates", taking into account their interaction at their interfaces.

In our work, we use more precisely the model, called M4-5n, which has 5 mechanical fields per layer. We also complete this with "Winkler springs" which supports the bottom layer. These constitute an approximation of the supporting soil. The model fitted with these springs is noted M4-5nW.

The main advantage of this type of model, which seems to us particularly suited to the objectives of the DVDC project, lies in its ability to take into account the presence of cracks or of (partially) debonded interfaces within multilayer structures. This capacity manifests itself in two aspects compared to the more usual 3D approaches: on the one hand the M4-5n allows an easy geometric description of discontinuity surfaces such as vertical or horizontal cracks (debonding); on the other hand the values of the strain or stress mechanical fields of M4-5n remain finite in the vicinity of these geometrical singularities, which avoids the use of the specific computing techniques developed in Fracture Mechanics for the determination of the stress intensity factors.

This report is only the first step in the progression process we have set for ourselves. It has four main parts and specific objectives.

- i) In a first part, we recall the main elements of the M4-5n model without going into too much detail on the equations (these can be found in the references as well as in the appendices, provided at the end of the report) ;
- ii) We then present the principle for the statement of a structural problem of type M4-5nW in "variational form", using the theorem of the maximum of the complementary energy ;

iii) We show how this “compact” formulation of the problem makes it possible to solve it by means of a mixed finite element technique, considering as principal unknowns both the fields of displacements and generalized constraints ;

iv) Finally one presents the way to introduce both into the variational formulation of the problem and into the associated FEM code the presence of vertical cracks within the layers or of debonded areas between layers.

Some first examples of modeling and results are presented, just by way of illustration.

The planned follow-up to this work is twofold.

One will be to push the modeling towards the propagation of cracks or interface debonding areas induced by fatigue under the effect of road traffic, using for example of Paris' law at any point of crack fronts.

The other part of our research will be turned to the application of the tool to the analysis of a certain number of questions at the heart of the problems of DVDC project, such as for example the mode and kinetics of crack(s) propagation in a new asphalt concrete layer built at the top of an already cracked support.

Introduction

Le présent rapport (tranche 1) comporte 5 parties.

La partie 1 contient une courte description du modèle M4-5n et de ses équations. Celles-ci figurent *in extenso* en annexe.

La partie 2 décrit brièvement les principes de résolution du modèle par une méthode générale aux éléments finis mixtes, mise en œuvre dans (Nasser, Nasser et al., 2018). Quelques indications sont données sur l'implémentation numérique de celle-ci, effectuée à travers l'écriture d'un script « MFEM-Fissuroute » au sein du logiciel FreeFem++.

On précise en partie 3 les spécificités liées à la modélisation de fissure(s) verticale(s) inscrites dans l'épaisseur des couches de chaussée et sur les adaptations apportées à la première version du script « MFEM-Fissuroute ».

De la même façon, la partie 4 présente les spécificités de la prise en compte de surfaces de décollement entre deux couches.

La partie 5 illustre la mise en œuvre du modèle et du script FreeFem associé, sur un premier exemple de calcul de chaussée avec fissure verticale ou/et décollement.

1. Présentation du modèle M4-5n (sans fissure)

Pour une description détaillée des modèles M4-5n (construction, équations, résolution, applications), le lecteur pourra se reporter à la bibliographie, dont certaines références sont données en fin de document.

L'objectif ici est de faciliter l'appropriation du modèle par les lecteurs, en ne retenant que ses caractéristiques principales, suffisantes à bien comprendre son fonctionnement. Les équations du modèle sont rappelées *in extenso* en annexe.

On s'appuie pour ce faire sur la forte analogie existant entre le modèle M4-5n et les théories plus usuelles de poutres ou plaques introduites en RDM (résistance des matériaux) et également formulées en termes de champs mécaniques généralisés (déplacements, déformations, contraintes).

On passe en revue :

- la géométrie des modèles M4-5n en lien avec les structures de chaussée
- les champs de déplacement, déformation et contraintes généralisés qui leurs sont associés
- les équations d'équilibre, de compatibilité cinématique et de comportement reliant ces champs
- la prise en compte des conditions aux limites de type déplacements ou contraintes.

1.1. Aspects géométriques

Le modèle M4-5n peut être vu dans son acceptation la plus simple comme un empilement de n plaques élastiques disposées dans des plans parallèles de directions (x, y) et collées les unes sur les autres dans le cas d'interfaces « parfaits ». Ceux-ci permettent de simuler avec grande précision le comportement élastique des structures composites multi-couches

relativement peu épaisses, travaillant essentiellement en flexion/cisaillement, mais possiblement aussi en compression dans le cas de couches à faibles modules.

Le M4-5n est donc naturellement transposable aux cas des chaussées, qui sont également des structures multicouches, fonctionnant en grande partie en flexion/cisaillement ou compression verticale, sous l'effet des charges de trafic. Afin de représenter le sol support d'extension semi-infinie, il convient d'ajouter au modèle une couche inférieure de ressorts, de direction verticale, fonctionnant soit indépendamment les uns des autres (M4-5n+ massif de Winkler, noté M4-5nW dans la suite), soit de façon couplée, à la façon d'un massif de Boussinesq. On se limite dans la suite aux modèles M4-5nW.²

Les modèles M4-5n ou M4-5nW sont donc caractérisés en premier lieu par leur géométrie en plan $\Omega(x, y)$ qui peut être finie ou infinie en théorie (comme dans les modèles de chaussée « Alizé » considérés en dimensionnement). On suppose dans la suite la direction x orientée suivant l'axe longitudinal de la chaussée et y dirigé suivant son axe transversal. En pratique, nous ne modéliserons que des domaines finis compte tenu de la méthode aux éléments finis retenue au niveau de la résolution du modèle, mais comme en éléments finis 3D le cas infini peut au besoin être approché autant que souhaité, en repoussant suffisamment loin les frontières de $\Omega(x, y)$.

Dans les cas usuels, la description géométrique des modèles M4-5n devient complète en leur adjoignant les épaisseurs de couches e^i pour $i = 1$ à n , qui définissent également implicitement les cotes $z^{i,i+1}$ des diverses interfaces entre couches. En supposant la cote z nulle en surface de chaussée et **croissant vers le bas** :

$$z^{i,i+1} = z^{i-1,i} + e^i \quad (1)$$

avec :

$z^{i,i+1}$ = cote de l'interface située entre les couches n° i et $i + 1$.

$z^{0,1} = 0$ = cote en surface de chaussée

Nous verrons que la prise en compte de fissures conduit à généraliser cette description par la considération de sous-couches d'épaisseurs variables $e(x, y)$ au sein d'un même matériau.

² La plupart des considérations contenues dans ce rapport s'appliquant au M4-5n comme au M4-5nW, on se restreint le plus souvent à l'appellation M4-5n. La notation M4-5nW n'est utilisée que lorsque la modélisation du support a une importance spécifique.

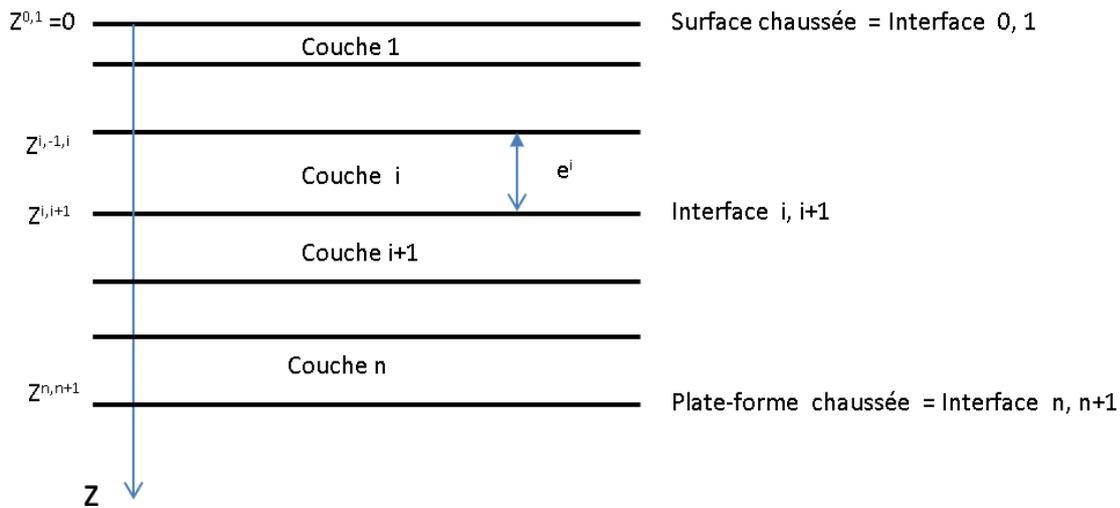


Figure 1 : Géométrie 3D multi-couche associée aux modèles 2D de type M4-5n

1.2. Champs de déplacements généralisés du M4-5n

Nous nous plaçons ici dans le cadre des petits déplacements et petites transformations suffisant à traiter les problèmes de mécanique du comportement des chaussées.

Comme en théories de poutres ou plaques, le modèle M4-5n conduit à introduire des champs mécaniques (déplacements, déformations, contraintes) généralisés, qui « condensent » dans la direction z les champs 3D usuels de la mécanique des milieux continus. Il s'agit donc de champs qui ne dépendent que des variables (x, y) .

Les champs de déplacements généralisés du M4-5n sont ainsi au nombre de 5 par couches.

Ils sont constitués :

- des déplacements horizontaux $U_x^i(x, y)$, $U_y^i(x, y)$ et verticaux $V^i(x, y)$ (déflexion) des plans médians des couches ($i = \text{indice de couche}$)
- des rotations $\Phi_x^i(x, y)$ autour de l'axe x et $\Phi_y^i(x, y)$ autour de l'axe y des normales initiales à ces plans.

Ces dernières sont donc considérées ici comme des degrés de liberté indépendants de la déflexion $V^i(x, y)$, signifiant comme en théorie générale des plaques, le fait que les normales initiales ne restent pas nécessairement normales aux plans médians des couches au cours de leur « transport » (hypothèses plus générales que les hypothèses de Bernouilli ou de Love-Kirchoff utilisées respectivement en poutre et plaque mince).

La connaissance des 5 champs précédents permet au besoin à partir d'un certain nombre de relations cinématiques de remonter aux déplacements 3D usuels de l'ensemble des points de la couche $n^{\circ}i$ (champs de déplacements $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ suivant les 3 directions d'espace \vec{x} , \vec{y} , \vec{z}).

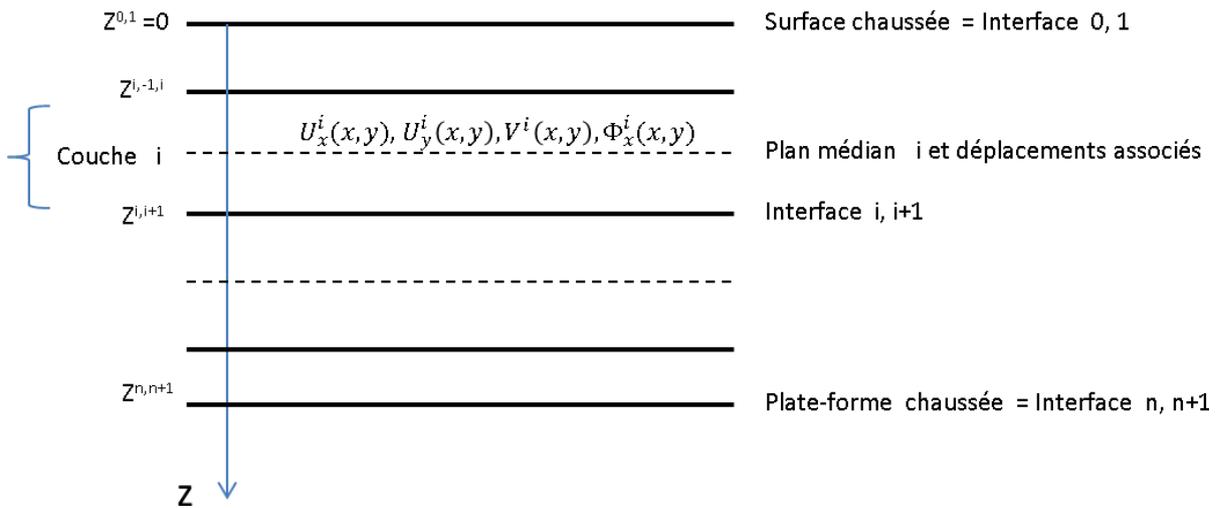


Figure 2 : Déplacements généralisés M4-5n définis au niveau des plans médians

1.3. Champs de déformation généralisés du M4-5n et équations de compatibilité cinématique

Les déformations généralisées du M4-5n comportent des quantités se rapportant aux couches et d'autres se rapportant aux interfaces.

Les déformations de couche sont au nombre de 8. Il s'agit des :

- déformations membranaires des plans médians ($\varepsilon_{xx}^i, \varepsilon_{xy}^i, \varepsilon_{yy}^i$)
- déformations de courbure des plans médians ($\chi_{xx}^i, \chi_{xy}^i, \chi_{yy}^i$)
- déformations de cisaillement de couche (d_x^i, d_y^i).

Les déformations d'interface sont les déformations de cisaillement ($D_x^{i,i+1}, D_y^{i,i+1}$) et normales $D_z^{i,i+1}$.

L'ensemble de ces champs est fonction des variables (x, y) et est lié aux champs de déplacements, à travers des équations de compatibilité cinématique mettant en jeu les dérivées spatiales suivant x et y (cf. annexe A.1.2).

Les déformations membranaires se déduisent ainsi des déplacements horizontaux des plans médians des couches, par les équations de compatibilité cinématique usuelles, à savoir :

$$\varepsilon_{xy}^i(x, y) = \frac{U_{x,y}^i(x,y) + U_{y,x}^i(x,y)}{2} \quad (2)$$

Les courbures des plans médians se déduisent des dérivées premières des champs de rotation des normales aux plans médians. Ainsi, par exemple :

$$\chi_{xx}^i(x, y) = \Phi_{x,x}^i(x, y) \quad (3)$$

Les déformations de cisaillement des couches se mesurent à partir de la perte d'orthogonalité en cours du transport, des directions initialement normales aux plans médians. Ainsi, par exemple :

$$d_x^i = \Phi_x^i + V_{,x}^i. \quad (4)$$

Dans le cas des hypothèses de Bernoulli ou de Love-Kirchhoff, ces quantités d_x^i, d_y^i seraient nulles et l'on retrouverait alors les relations classiques telles que $\chi_{xx}^i(x, y) = -V_{,xx}^i(x, y)$ entre courbures et dérivées secondes des déplacements des plans médians de couche. La présente modélisation est donc plus fine.

Pour leur part, les déformations de cisaillement d'interface sont définies par l'équation suivante, qui fait intervenir la différence des déplacements horizontaux au passage d'une couche à la suivante. Ainsi par exemple:

$$D_x^{i,i+1} = \underbrace{U_x^{i+1} - \frac{e^{i+1}}{2} \Phi_x^{i+1}}_{\text{déplacements couche } n^{o}i+1} - \left(\underbrace{U_x^i + \frac{e^i}{2} \Phi_x^i}_{\text{déplacements couche } n^{o}i} \right) \quad (5)$$

Les déformations normales d'interface mesurent quant à elle les variations d'épaisseur entre plans médians de couches successives ; ainsi pour l'interface $i, i + 1$:

$$D_z^{i,i+1} = \underbrace{V^{i+1}}_{\text{dépl vertical couche } n^{o}i+1} - \underbrace{V^i}_{\text{dépl vertical couche } n^{o}i} \quad (6)$$

Ces quantités interviennent plus spécialement dans les couches de faible module (cf. GNT), qui travaillent essentiellement en déformation verticale.

Il est à noter que les déformations d'interface ont ici la dimension de déplacements, contrairement aux déformations de couches qui restent adimensionnelles.

1.4. Champs de contraintes généralisés du M4-5n et équations d'équilibre

Les champs de contraintes généralisés du M4-5n comptent comme dans le cas des déformations des quantités propres aux couches et des quantités propres aux interfaces.

Les contraintes généralisées de couche au nombre de 8 sont les mêmes que celles introduites en théorie des plaques et se rattachent aux contraintes 3D de la même façon.

On compte ainsi :

- les efforts membranaires $N_{xx}^i, N_{xy}^i, N_{yy}^i$
- les moments de flexion $M_{xx}^i, M_{xy}^i, M_{yy}^i$
- les efforts tranchants Q_x^i, Q_y^i

A titre d'exemple, les efforts $N_{xx}^i(x, y)$ et $M_{xx}^i(x, y)$ sont définis à partir de la contrainte 3D usuelle σ_{xx}^{3D} intégrée sur l'épaisseur de la couche $n^{o}i$:

$$N_{xx}^i(x, y) = \int_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} \sigma_{xx}^{3D}(x, y, z) dz \quad (7.1)$$

*effort normal s'exerçant dans la couche n°i
par unité de longueur suivant la direction \vec{x}*

$$M_{xx}^i(x, y) = \int_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} \sigma_{xx}^{3D}(x, y, z) \left(z - \frac{z^{i-1,i} + z^{i,i+1}}{2} \right) dz \quad (7.2)$$

*moment de flexion linéique s'exerçant dans la couche n°i
autour de l'axe \vec{y} de son plan médian*

Ces deux expressions sont identiques à celles que l'on aurait en théorie des plaques pour une plaque formée ici par la couche de matériau n°i.

Les contraintes d'interface sont au nombre de 3 par interface ; il s'agit des :

- efforts de cisaillement $\tau_x^{i,i+1}, \tau_y^{i,i+1}$
- efforts « d'arrachement » $\nu^{i,i+1}$

Il s'agit directement ici, au sens 3D usuel, des composantes du vecteur contrainte agissant sur l'interface n° $i, i + 1$.

Il est à noter que la dénomination « effort d'arrachement » pour désigner en tout point $i,i+1$ est quelque peu trompeuse, aux endroits où les efforts normaux d'interface sont en compression. Cette terminologie a surtout été introduite initialement pour qualifier les états de contrainte de traction, situés au voisinage des surfaces de décollement dans les structures constituées de matériaux composites

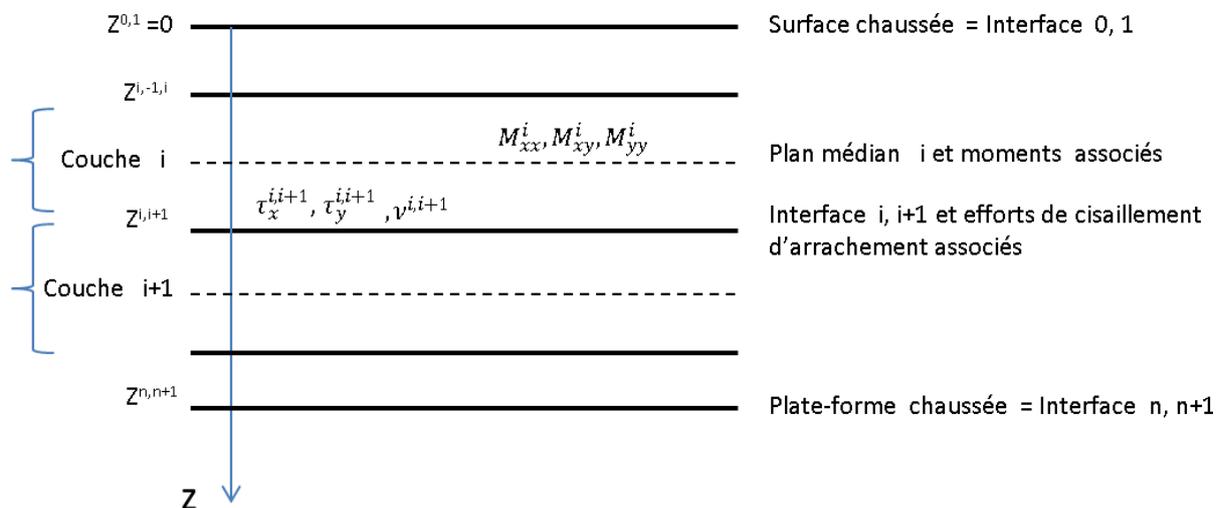


Figure 3 : Illustration des efforts généralisés M4-5n
Ex : efforts de flexion généralisés M4-5n définis au niveau des plans médians
Efforts de cisaillement et arrachement définis au niveau des interfaces

Le procédé de construction du M4-5n fournit en même temps que la définition des efforts généralisés, les équations d'équilibre auxquelles ils satisfont.

Celles-ci sont au nombre de 5 par couche (cf. annexe) et sont voisines dans leur écriture des équations d'équilibre que l'on obtiendrait pour des plaques, soumises en faces supérieure et inférieure à des efforts externes, égaux aux efforts d'interface normaux et de cisaillement du M4-5n (cf. équilibre d'un empilement de plaques).

Les conditions limites en surface de chaussée s'expriment directement par la donnée des contraintes sur « l'interface (0,1) ».

Par exemple, pour un chargement constitué d'un champ de pression $q(x, y)$ et dénué d'efforts de cisaillement³, on aura :

- $\tau_x^{0,1} = 0 ; \tau_y^{0,1} = 0$ (8)

- $v^{0,1} = -q(x, y)$ (9)

Les conditions limites en face inférieures du modèle M4-5nW (support de Winkler) s'écrivent quant à elles :

- $\tau_x^{n,n+1} = 0 ; \tau_y^{n,n+1} = 0$ (cisaillements négligés entre sol support et couche supérieure) (10)

- $v^{n,n+1} = -k V_{bas}^n$ (effort normal proportionnel à la déflexion du bas de couche⁴ $n^o n$ avec avec k = « raideur » du sol de Winkler) (11)

1.5. Lois de comportement du M4-5n et densités d'énergie de contrainte associées

Les contraintes et déformation généralisées du M4-5n sont liées en tout point entre elles, au travers de lois élastiques, construites à partir de leurs expressions en fonction des contraintes et déformations 3D et de l'hypothèse de matériaux possédant chacun ($\forall i$) un comportement de type élastique linéaire isotrope.

Ces relations sont donc linéaires et s'expriment en fonction des modules d'Young et coefficients de Poisson des différentes couches du M4-5n (cf. annexe).

Elles se divisent en 2 familles :

- les équations (au nombre de 8 par couche) relatives aux déformations généralisées des couches, qui ne font intervenir que les module et coefficient de Poisson E^i, ν^i et épaisseur e^i de la couche considérée.⁵

³ ex : $q(x, y) = \sum_{pneumatiques} (pression\ pneu \times indicatrice\ empreinte\ pneu(x, y))$

⁴ Le déplacement V_{bas}^n du bas de couche n est à bien distinguer du déplacement V^n du plan médian n , qui tient compte des déformations verticales de la couche n . V_{bas}^n n'est pas une variable explicite du M4-5n, mais peut être calculée *a posteriori*, si besoin, à partir du champ $v^{n,n+1}$: $V_{bas}^n = -v^{n,n+1} / k$.

⁵ Bien faire la différence entre les symboles ν et ν des coefficients de Poisson et efforts d'arrachements.

Exemple :

$$\chi_{xx}^i = \frac{12}{e^i E^i} \left((1 + \nu^i) M_{xx}^i - \nu^i (M_{xx}^i + M_{yy}^i) \right) = \frac{12}{e^i E^i} (M_{xx}^i - \nu^i M_{yy}^i) \quad (12)$$

= relation courbure/moments (cf. relation usuelle de plaque élastique).

- les équations (au nombre de 3 par couche) liées aux déformations généralisées des interfaces, qui font intervenir les coefficients de Poisson et épaisseurs des 2 couches situées de part et d'autre.

Exemple :

$$D_z^{i,i+1} = \frac{9e^i}{70E^i} v^{i-1,i} + \frac{9e^{i+1}}{70E^{i+1}} v^{i+1,i+2} + \frac{13}{35} \left(\frac{e^i}{E^i} + \frac{e^{i+1}}{E^{i+1}} \right) v^{i,i+1} \quad (13)$$

= relation entre déformation "verticale" et efforts normaux généralisés d'interface.

Densités d'énergie de contrainte (généralisée)

Une autre façon d'exprimer l'ensemble de ces relations de comportement, qui nous sera particulièrement utile par la suite, est d'utiliser les densités d'énergie de contrainte qui leur sont associées.

Pour rappel, en prenant l'exemple simple d'un ressort de loi de comportement $F = k U$, son énergie élastique de « contrainte » W_F a pour valeur :

$$W_F = \frac{F^2}{2k} \quad (14)$$

Cette expression correspond ici à l'énergie élastique emmagasinée dans le ressort sous l'effet de la force F et permet comme il est facile de le voir de retrouver la loi de comportement à travers la relation :

$$U = \frac{d W_F}{d F} \quad (15)$$

De la même façon, la loi de comportement bien connue des poutres en flexion, $\frac{d^2 y}{dx^2} = M/EI$ ($y(x)$ =déflexion, $M(x)$, $I(x)$ =moment et inertie de flexion), peut être exprimée sous la forme , $y'' = \frac{d w_M}{d M}$ à partir de la densité d'énergie élastique $w_M = \frac{M^2}{2EI}$, définie le long de l'axe neutre de la poutre.

En généralisant cette démarche, il est alors possible d'associer au M4-5n des densités d'énergie reliant 2 à 2 les déformations et contraintes généralisées « duales » (ex : couples $(\varepsilon_{\alpha\beta}^i, N_{\alpha\beta}^i)$, $(\chi_{\alpha\beta}^i, M_{\alpha\beta}^i)$, ... voir ci-dessous) permettant de retrouver l'ensemble des lois de comportement.

En l'occurrence, ces densités peuvent être scindées en 3 termes par couche, notées:

w_c^i = densité d'énergie élastique des efforts de membrane et flexion

w_v^i = densité d'énergie élastique des efforts tranchants

w_Q^i = densité d'énergie élastique des efforts d'arrachements

et telles que:

$$\bullet \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{\partial w_c^i}{\partial N_{\alpha\beta}^i} \quad \text{et} \quad \chi_{\alpha\beta}^i = \frac{\partial w_c^i}{\partial M_{\alpha\beta}^i} \quad (16)$$

$$\bullet \quad d_{\alpha}^i = \frac{\partial w_Q^i}{\partial Q_{\alpha}^i} \quad (17)$$

$$\bullet \quad D_{\alpha}^{i,i+1} = \frac{\partial w_Q^i}{\partial \tau_{\alpha}^{i,i+1}} + \frac{\partial w_Q^{i+1}}{\partial \tau_{\alpha}^{i,i+1}} \quad (18)$$

$$\bullet \quad D_z^{i,i+1} = \frac{\partial w_v^i}{\partial v_{\alpha}^{i,i+1}} + \frac{\partial w_v^{i+1}}{\partial v_{\alpha}^{i,i+1}} \quad (19)$$

Les expressions de w_c^i, w_v^i, w_Q^i sont détaillées en annexe A1.

Ces densités d'énergies sont additives, tant au niveau de chaque couche que de l'ensemble des couches, conduisant au final à la densité d'énergie élastique totale w_e emmagasinée, à contraintes données, dans le M4-5n :

$$w_e = \sum_{i=1}^n (w_c^i + w_v^i + w_Q^i) \quad (20)$$

= densité d'énergie élastique en contraintes généralisées du M4-5n

L'ensemble des lois de comportement du M4-5n peut alors s'exprimer à partir de cette seule quantité.

Exemples :

$$\chi_{\alpha\beta}^i = \frac{\partial w_e}{\partial M_{\alpha\beta}^i} \quad (21)$$

$$D_{\alpha}^{i,i+1} = \frac{\partial w_e}{\partial \tau_{\alpha}^{i,i+1}} \quad (22)$$

Le cas du M4-5nW se déduit aisément du précédent, par ajout de la densité d'énergie élastique de contrainte associée aux « ressorts surfaciques » k de Winkler, à savoir :

$$w_{Winkler} = \frac{k v^n (bas)^2}{2} \quad (23)$$

$$w_{eW} = \sum_{i=1}^n (w_c^i + w_v^i + w_Q^i) + w_{Winkler} \quad (24)$$

= densité d'énergie élastique en contraintes généralisées du M4-5nW

1.6. Conditions aux limites sur le contour d'une structure M4-5nW

Comme on l'a vu, les conditions aux limites en effort, imposées en surface des modèles M4-5n (ex : aires à pression imposée) sont prises en compte à travers la donnée des contraintes généralisées $v^{0,1}$ et $\tau_x^{0,1}, \tau_y^{0,1}$.

La définition d'un problème complet nécessite également de spécifier les conditions aux limites prévalant sur les « frontières verticales » de la structure étudiée, c-à-d sur les degrés de liberté situés en périphérie $\partial\Omega$ du domaine plan $\Omega(x, y)$.

En théorie des plaques, on sait que de telles conditions peuvent être de type « appui simple », « encastrement », « moment imposés », etc...

Pour une structure M4-5n, de telles conditions se généralisent d'une part à l'ensemble des n couches du modèle et d'autre part à l'ensemble des degrés de liberté de déplacement ou du vecteur de contraintes normales généralisé propres à chaque couche.

Autrement dit, un jeu de conditions limites en un point (x, y) de $\partial\Omega$, de normale unitaire sortante (n_x, n_y) , consistera de manière générale en la donnée en toute couche $n^o i$ de 5 quantités non liées entre elles parmi les 10 suivantes :

- $U_x^i, U_y^i, V^i, \Phi_x^i, \Phi_y^i$ (déplacement généralisés intra-couches)
- $N_{xx}^i n_x + N_{xy}^i n_y, N_{xy}^i n_x + N_{yy}^i n_y, M_{xx}^i n_x + M_{xy}^i n_y, M_{xy}^i n_x + M_{yy}^i n_y, Q_x^i n_x + Q_y^i n_y$ (vecteur contrainte généralisé intra-couche)

Par exemple, on pourra typiquement adopter sur les plans normaux à l'axe x d'un modèle de chaussée ($n_x = \pm 1, n_y = 0$), les conditions limites suivantes :

$$\bullet U_x^i = 0, \Phi_x^i = 0, N_{xy}^i = 0, M_{xy}^i = 0, Q_x^i = 0 \quad (25)$$

qui, en toute cote z , reviennent à bloquer le déplacement normal suivant x et à négliger les efforts de cisaillement dans les directions (x, y) et (x, z) .

2. Résolution du modèle M4-5n par méthode d'éléments finis mixte – Implémentation au sein du logiciel FreeFem++

2.1. Structure du problème obtenu : linéarité, bilan équations/inconnues

L'ensemble des équations du problème montre que l'on a affaire à un problème aux dérivées partielles du premier ordre en x, y et linéaire dans sa totalité ⁶.

⁶ Toutes les équations s'expriment linéairement par rapport aux variables et à la donnée d'entrée q . Tout champ solution vérifiera donc la propriété de linéarité :
solution sous chargement $(a_1 q_1 + a_2 q_2) = a_1 \times \text{sol. sous char } (q_1) + a_2 \times \text{sol. sous char } (q_2)$

Les tableaux suivant qui établissent le décompte des inconnues et des équations du modèle M4-5nW en fonction du nombre de couches n montrent par ailleurs que celles-ci sont en nombre identique, égal en l'occurrence à $27n+1$ (ex : 109 champs et variables pour un quadri-couche).

Champs inconnus*	Couche	Interface	Total
Dép. généralisés	$5n$		$5n$
Déf. généralisées	$8n$	$3(n+1)$	$11n+3$
Contr. généralisées	$8n$	$3(n-1)+1^{**}$	$11n-2$
			$27n+1$

* : après exclusion ici des contraintes d'interface directement connues à partir des données (conditions limites connues)

** : maintien dans les inconnues de la contrainte $v^{n,n+1}$ reliée à la condition d'appui de Winkler

Equations*	Couche	Interface	Total
Comp. cinématique	$8n$	$3(n-1)$	$11n-3$
Equilibre	$5n$		$5n$
Loi de comportement	$8n$	$3(n+1)+1^{**}$	$11n+4$
			$27n+1$

* : après exclusion des équations relatives aux conditions limites connues

** : prise en compte de la condition d'appui de Winkler

On obtient ainsi un problème bien posé⁷, permettant d'associer à la donnée $q(x, y)$ une et une seule solution.

2.2. Résolution du problème par méthode d'éléments finis mixtes

La bibliographie sur le M4-5n fait état de plusieurs modes de résolution de tels systèmes d'équation, soit de type semi-analytique dans certains cas particuliers, soit par différences finies.

La thèse d'Hanan Nasser a permis plus récemment de développer une méthode aux éléments finis, qui présente les avantages :

- d'un traitement numérique systématique des équations à résoudre
- d'une grande souplesse de manipulation de géométrie du modèle, particulièrement utile dans la prise en compte des fissures ou surface de décollement.

Qui plus est les développements ont eu lieu dans le logiciel FreeFem++ (Hecht), pour lequel l'implémentation se borne essentiellement à introduire sous forme de méta-langage la

⁷ Les conditions précédentes ne sont pas strictement suffisantes à le montrer. La preuve s'appuie également sur les arguments énergétiques considérés plus loin.

formulation variationnelle des problèmes aux dérivées partielles, ce qui permet de limiter en très grande partie le travail de programmation et les risques d'erreur attendant⁸.

La bibliothèque d'éléments finis 2D de FreeFem++ est restreinte du point de vue géométrie, à l'emploi de triangles, mais offre en revanche de nombreuses possibilités de choix des espaces fonctionnels associés aux fonctions d'interpolation (ex : voir plus loin l'utilisation de fonctions bulles).

Le principe de résolution, à l'origine de la méthode par éléments finis mixtes développée dans (Nasser, Nasser et al., 2018), s'appuie sur le théorème de l'énergie complémentaire, bien connu en élasticité.

Pour rappel, celui-ci dit que le champ de contraintes Σ^* solution d'un problème élastique est celui qui maximise l'énergie complémentaire $E_c(\Sigma)$ de la structure considérée sur l'ensemble des champs de contrainte Σ statiquement admissibles.

Le théorème s'applique aussi bien pour des champs de contrainte 3D que pour des champs de contrainte généralisés.

Explicitons alors en quelques mots son application dans le cadre d'un problème de chaussée, modélisée par M4-5nW.

Notons Σ l'ensemble des $11n - 2$ champs de contrainte du M4-5n.

Energie complémentaire du M4-5nW

L'énergie complémentaire est la somme de l'opposé de l'énergie élastique emmagasinée dans la structure et du travail des efforts internes dans les champs de déplacements imposés en frontière de Ω . Ceux-ci étant très généralement pris nuls, on a simplement pour la chaussée Ω :

$$E_c(\Sigma) = - \int_{\Omega} w_e(\Sigma) d\Omega \quad (26)$$

où w_e est la densité d'énergie introduite en 1.5.

Champs de contrainte statiquement admissibles

Par définition, ces champs sont ceux qui vérifient en tout point intérieur de Ω les équations d'équilibre mentionnées en 1.4. ainsi que les conditions limites en effort sur la surface $v^{0,1}(x, y) = -q(x, y)$ et sur le contour $\partial\Omega$.

Leur explicitation étant toutefois impossible dans le cas général, on va considérer le théorème de l'énergie complémentaire comme un problème de recherche de maximum sous contrainte⁹, qui se résout classiquement par l'introduction de Lagrangien.

⁸ Un tel code évite notamment d'avoir à « descendre » au niveau de la programmation des opérations effectuées à l'échelle des éléments finis et de l'assemblage (ex : calcul de rigidité des matrices élémentaires), souvent sources d'erreurs. Toutes ces opérations sont traitées à partir de l'introduction sous forme de méta-langage de la fonctionnelle à résoudre.

⁹ Terme à comprendre ici au sens « d'exigence ». Il s'agit donc d'une « exigence » sur la prise en compte de « contraintes admissibles ».

Lagrangien associé au problème

Notons $S(\Sigma)(x, y)$ le « vecteur » formé par l'ensemble des équations d'équilibre et introduisons le vecteur de champs de multiplicateurs de Lagrange $\Lambda(x, y)$, de même dimension.

Le Lagrangien $L(\Sigma, \Lambda)$ du problème à résoudre peut alors se définir par :

$$L(\Sigma, \Lambda) = E_c(\Sigma) + \int_{\Omega} {}^t\Lambda C(\Sigma)d\Omega = - \int_{\Omega} w_e(\Sigma) d\Omega + \int_{\Omega} {}^t\Lambda C(\Sigma)d\Omega \quad (27)$$

où le terme ${}^t\Lambda C(\Sigma)$ représente le produit scalaire en tout point (x, y) des vecteurs Λ et $C(\Sigma)$.

Il est possible sans changer la nature du problème, d'opérer sur la forme précédente des intégrations par parties permettant de diminuer le degré de dérivation des expressions mises en jeu dans L et de mieux conditionner ainsi l'étape de résolution par éléments finis (cf. annexe).

Solution

Le champ de contraintes recherché est le champ Σ^* du couple (Σ^*, Λ^*) rendant ce Lagrangien stationnaire, c-à-d tel que les variations δL de L pour toute variation des champs $(\delta\Sigma, \delta\Lambda)$ autour de (Σ^*, Λ^*) soient nulles. Autrement dit (Σ^*, Λ^*) sont formellement solutions du problème variationnel :

$$\forall (\delta\Sigma, \delta\Lambda) \quad \delta L(\Sigma^*, \Lambda^*)(\delta\Sigma, \delta\Lambda) = L_{,\Sigma}(\Sigma^*, \Lambda^*) \cdot \delta\Sigma + L_{,\Lambda}(\Sigma^*, \Lambda^*) \cdot \delta\Lambda = 0 \quad (28)$$

Comme par ailleurs, le champ de multiplicateurs de Lagrange Λ^* s'avère n'être rien d'autre que le champ de déplacements solution,

$$\Lambda^* = U^* \quad (29)$$

la résolution du problème précédent conduit non seulement au calcul des champs de contrainte recherchés, mais aussi au calcul des déplacements et des déformations (à travers les équations de compatibilité cinématique).

On utilise donc dans la suite les notations $U, \delta U, U^*$ se référant aux déplacements généralisés du M4-5n en lieu et place des notations $\Lambda, \delta\Lambda, \Lambda^*$ moins explicites.

Résolution par méthode d'éléments finis mixtes

La résolution du problème variationnel précédent ne peut se faire dans le cas général que sur des espaces fonctionnels de dimension finie des champs Σ, U . Ceci permet en effet de ramener le problème de stationnarité du Lagrangien $L(\Sigma, U)$ à la résolution de systèmes linéaires de dimensions finies pouvant être effectués sur ordinateur. La solution obtenue

devient alors une approximation de la solution théorique, mais pouvant être rendue aussi précise que souhaité par un choix suffisamment grand de la taille des espaces fonctionnels.

Une façon systématique de construction de tels espaces, que nous adoptons dans la suite est l'utilisation de la méthode des éléments finis, qui associe maillages et espaces fonctionnels. En particulier, la dimension des espaces fonctionnels Σ, U est en relation directe avec les nombres de nœuds et degrés de liberté des maillages utilisés dans la modélisation géométrique des structures.

En mécanique des solides déformables, la méthode des éléments finis est souvent appliquée au cas de problèmes variationnels, dont la formulation peut se ramener *in fine* à la seule recherche des déplacements de la structure. Les inconnues principales « portées » par les nœuds du maillage sont alors les déplacements de la structure, d'où peuvent être déduits une fois ceux-ci connus, les champs « secondaires » de déformation et de contrainte.

Dans le cas présent, la recherche « simultanée » des champs solution Σ^*, U^* conduit à introduire des éléments finis « mixtes », ayant pour degrés de liberté non seulement les valeurs nodales des champs de déplacement généralisés, mais aussi les valeurs nodales des champs de contrainte généralisés ; d'où le nom de « méthode aux éléments finis mixtes » donnée à ce type de technique.

Implémentation au sein du logiciel FreeFem++

La résolution par méthode aux éléments finis mixtes, des problèmes de type M4-5n a été introduite sous forme de scripts au sein du logiciel FreeFem++. Ce logiciel présente le grand intérêt de ne nécessiter pour l'essentiel, que :

- l'introduction sous forme de macro-langage de la variationnelle,

$$\delta L = L_{,\Sigma}(\Sigma^*, \Lambda^*) \delta \Sigma + L_{,\Lambda}(\Sigma^*, \Lambda^*) \delta \Lambda \quad (30)$$

- et la donnée des degrés des fonctions d'interpolation choisis pour approximer chacune des composantes des champs de contraintes et déplacements généralisés¹⁰.

Il ne nécessite aucunement en revanche d'intervenir dans les processus de discrétisation (ex : programmation des nombreuses matrices types, élémentaires, associées aux différents termes de δL) et de résolution liés au problème.

La structure des scripts se présente ainsi de la façon suivante :

- donnée des degrés d'interpolation des différents champs de contraintes et déplacements généralisés
- construction du maillage 2D (en plan) de la structure M4-5n à modéliser
- introduction des propriétés des couches : nombre et pour chacune d'elles :
 - épaisseurs, module d'Young, coefficient de Poisson
- définition du chargement (ex : aires rectangulaires ou circulaires, à pression uniforme) et des conditions limites en déplacement

¹⁰ Une attention toute particulière doit être apportée à ces choix dans les méthodes aux éléments finis mixtes de façon à obtenir *in fine* un système algébrique inversible.

- énoncé de la fonctionnelle δL
- instructions de post-processing et de visualisation des résultats, éventuellement ramenés aux grandeurs usuelles¹¹ de la Mécanique des Milieux Continus (ex : constitution de tableaux de résultats XCEL, cartes d'isovaleurs,...).

2.3. Prise en compte de charges en mouvement

Il peut être utile en Mécanique des Chaussées de reproduire l'effet de charges en mouvement (d'intensités constantes) afin d'étudier plus complètement l'évolution des champs mécaniques au passage d'un véhicule.

En auscultation par exemple, ceci permet d'interpréter les mesures de déflexion ou de déformation réalisées au passage d'un véhicule non seulement en fonction des valeurs maximales atteintes, mais plus largement en fonction de l'ensemble des mesures acquises au cours du déplacement du véhicule, qui peuvent aussi se révéler riches d'informations sur le fonctionnement des chaussées.

Dans le présent projet, ceci nous permettra d'examiner plus tard les variations d'efforts en front de fissure ou décollement d'interface, en fonction de la position des véhicules et l'incidence des charges de trafic routier sur les processus d'extension de ces dommages.

A partir du script décrit précédemment, il est facile de reproduire cet effet de charges roulantes, à amplitudes de forces constantes. Dans le cadre d'un algorithme non incrémental (autorisé tant qu'on reste en élasticité), il suffit d'encapsuler les instructions précédentes dans une boucle permettant de faire évoluer la position x_{char} de la charge¹² par pas discrets de valeur Δx_{char} choisie.

Les calculs peuvent être effectués à maillage constant, indépendant de la position de charge, sans chercher à faire coïncider bords de charge et bords d'éléments, en utilisant l'indicatrice $Ind_{char}(x, y; x_c)$ de l'empreinte de la charge¹³.

3. Prise en compte de fissures verticales et décollements d'interface

Sur la base des éléments venant d'être décrits, nous souhaitons au sein du projet DVDC développer plus spécifiquement des modélisations M4-5n susceptibles de rendre compte de fissures ou décollements d'interface, se propageant dans les structures de chaussée.

Le problème revêt deux aspects :

- le calcul d'une part, des champs généralisés en présence de fissures ou décollements, à géométries connues

¹¹ Ex : déplacements, tenseurs de déformation ou de contraintes 3D en tout point donné (x, y, z) de la chaussée

¹² x_{char} peut être prise comme l'abscisse dans le repère de la chaussée de l'origine du repère lié à la charge roulante

¹³ $Ind_{char}(x, y; x_c)$ = pression sous la charge si le point (x, y) en surface de chaussée est dans l'aire de chargement ; $Ind_{char}(x, y; x_c) = 0$ sinon.

- la propagation d'autre part de ces défauts sous l'effet de la répétition de charges engendrées par le trafic.

Dans ce rapport DVDC inscrit en tranche 1 du PN, nous nous intéressons à la première de ces questions.

Commençons ainsi par regarder la modélisation de fissures dans le cadre M4-5n.

3.1 Prise en compte de fissures verticales

Nous nous limitons ici au cas de fissures verticales planes, soit de type transversal inscrites dans des plans (y, z) , soit de type longitudinal inscrites dans des plans (x, z) . Pour simplifier l'exposé, on se place ici dans le cas d'une fissure unique et de type transversal, sachant que le cas d'une fissure longitudinale se traiterait de manière analogue.

On note ainsi x_{fis} l'abscisse longitudinale de cette fissure et $f_{fis}(y, z) = 0$ l'équation de son contour (front de fissure), telle que :

- $f_{fis}(y, z) \leq 0$ pour les points de coordonnées x_{fis}, y, z situés dans l'aire de fissure $\Omega_{fis}(x = x_{fis}, y, z) = \{x_{fis}\} \times \omega_{fis}(y, z)$ ¹⁴; (31)

- $f_{fis}(y, z) > 0$ pour les points situés en dehors. (32)

Pour rappel, la méthode générale de prise en compte d'une fissure au sein d'une structure maillée par éléments finis, est la suivante:

- introduction d'une coupure géométrique au niveau de la surface Ω_{fis} de la fissure, faisant apparaître ses deux bords (lèvres), Ω_{fis}^- et Ω_{fis}^+ situés à gauche et à droite de x_{fis} et venant « s'ajouter » à la frontière extérieure de la structure ;
- dédoublement des degrés de liberté (déplacements, contraintes) initialement situés sur Ω_{fis} , en attachant la moitié d'entre eux à la surface Ω_{fis}^- , l'autre moitié à la surface Ω_{fis}^+ ; les premiers (resp. les seconds) décrivent la variation des champs mécaniques au voisinage de la fissure, du côté gauche (resp. du côté droit) ;
- prise en compte des conditions de bord libre sur les surfaces Ω_{fis}^- et Ω_{fis}^+ ¹⁵.

Celles-ci se traduisent par l'annulation des composantes relatives à la couche fissurée, des vecteurs contraintes, normaux à ces deux surfaces (voir annexe A6).

Toutefois, compte tenu des spécificités du code FreeFem++, nous avons adopté dans nos scripts traitant des problèmes de fissures, une technique approchée, s'inscrivant en plus droite ligne du cas sans fissure, basée sur l'introduction d'une fonction d'endommagement des propriétés des couches au lieu d'un dédoublement de l'aire Ω_{fis} .

Détaillons quelque peu la méthode.

¹⁴ $\omega_{fis}(y, z) = \text{trace (projection horizontale) de } \Omega_{fis}(x = x_{fis}, y, z) \text{ suivant la direction } x$

¹⁵ On se place ici dans le cas d'une fissure fonctionnant en ouverture sous le chargement considéré, sans interpénétration de ses 2 lèvres. Cette condition est à vérifier *a posteriori* à partir des déplacements calculés sur les surfaces Ω_{fis}^- , Ω_{fis}^+ . Le cas de fissures susceptibles de se refermer sous chargement sera à envisager ultérieurement.

3.1.1 Aspects géométriques

Celle-ci repose sur la modélisation géométrique de la fissure, sous forme d'un domaine maillé (non vide) Ω_{fis}^ε , d'épaisseur $\Delta x = \varepsilon$ petite, mais finie dans la direction x .

Pour ce faire, on pourra dans un premier temps intégrer explicitement aux contours du maillage M4-5n les traces (segments d'axes y) des plans verticaux $x = x_{fis}$, $x^- = x_{fis} - \varepsilon/2$, $x^+ = x_{fis} + \varepsilon/2$, de façon à générer deux étroites bandes parallèles d'éléments finis, pour x compris entre x^- et x_{fis} et x compris entre x_{fis} et x^+ (voir figures 5, 6 et maillage de la figure 1).

La géométrie $\omega_{fis}(y, z)$ de la fissure dans le plan vertical sera introduite quant à elle à travers la définition des couches et la donnée de leurs épaisseurs.

Supposons ainsi la fissure Ω_{fis} située dans la couche M4-5n, portant initialement le numéro i et considérons la représentation générale de $\omega_{fis}(y, z)$ sous la forme :

$$z_{haut}(y) \leq z \leq z_{bas}(y) \text{ pour } 0 \leq y \leq l \text{ (largeur du maillage)} \quad (33)$$

où les 2 fonctions $z_{haut}(s)$, $z_{bas}(s)$ délimitent les contours « haut » et « bas » de la fissure¹⁶ avec $z_{haut}(y) \geq z^{i-1,i}$ et $z_{bas}(y) \leq z^{i,i+1}$.

Il conviendra alors dans ce cas général de décomposer la couche n° i en 3 « sous-couches » (au sens matériau) et d'ajouter en conséquence 2 nouvelles « couches » (au sens M4-5n) au modèle structural initial, en procédant bien entendu à la renumérotation adéquate de l'ensemble des couches¹⁷.

Les nouvelles couches auront alors les épaisseurs $z_{haut}(y) - z^{i-1,i}$, $z_{bas}(y) - z_{haut}(y)$, $z^{i,i+1} - z_{bas}(y)$ variables en y , mais se verront attribuer les valeurs de module d'Young et coefficient de Poisson de la couche n° i , hormis dans le domaine Ω_{fis}^ε pour $x_{fis} - \frac{\varepsilon}{2} < x < x_{fis} + \frac{\varepsilon}{2}$ (voir section suivante).

On peut remarquer ce faisant que la subdivision de couche entraînée par la présence de la fissure Ω_{fis} se répercute sur toute la longueur de la structure, indépendamment du fait que la fissure n'existe qu'en $x = x_{fis}$. En particulier, la géométrie $\omega_{fis}(y, z)$ de la fissure s'impose en tout x , conférant des formes cylindriques d'axe x aux nouvelles couches.

Au besoin toutefois, comme le montre l'équation ci-dessous, des modulations d'épaisseur en x peuvent être facilement combinées aux modulations en y pour rendre compte par exemple de multi-fissures transversales possédant des faciès verticaux distincts entre elles¹⁸.

Exemple de formules de variation d'épaisseur de couche suivant x et y pour prise en compte de deux fissures transversales situées en $x_{fis,1}$ et $x_{fis,2}$ et de faciès respectifs $\{z_{haut,1}(y) z_{bas,1}(y)\}$, $\{z_{haut,2}(y) z_{bas,2}(y)\}$:

¹⁶ Pour rappel, l'axe z est supposé orienté vers le bas ; d'où l'inégalité : $z_{haut}(s) \leq z_{bas}(s)$

¹⁷ Dans le cas $z_{haut}(y) = z^{i-1,i}$ ou $z_{bas}(y) = z^{i,i+1}$, il pourra être fait l'économie d'une sous-couche.

¹⁸ Il est à noter que le procédé utilisé, qui met en jeu des épaisseurs de couche variables, va au-delà de la théorie M4-5n standard, formulée pour des épaisseurs constantes. On fait ici l'hypothèse que les variations d'épaisseur sont suffisamment « lentes » (suivant x et y) pour pouvoir négliger les modifications à apporter aux équations M4-5n usuelles.

$$(z_{haut,1}(y) - z^{i-1,i})N_1(x) + (z_{haut,2}(y) - z^{i-1,i})N_2(x) \quad (34)$$

$$(z_{bas,1}(y) - z_{haut,1}(y))N_1(x) + (z_{bas,2}(y) - z_{haut,2}(y))N_2(x) \quad (35)$$

$$(z^{i,i+1} - z_{bas,1}(y))N_1(x) + (z^{i,i+1} - z_{bas,2}(y))N_2(x) \quad (36)$$

avec $N_1, N_2 =$ fonctions d'interpolation comprises entre 0 et 1 et telles que : $N_1(x_{fis,1}) = 1$, $N_2(x_{fis,2}) = 1$, $N_1(x) + N_2(x) = 1$ (+ propriétés de régularité, telle que par exemple dérivées nulles de N_1, N_2 en $x_{fis,1}$ et $x_{fis,2}$ respectivement pour conserver des géométries « lisses »).

3.1.2 Fonction d'endommagement

A partir d'un maillage et d'un jeu de données constitués selon les principes précédents, une façon simple de rendre compte de la présence d'une fissure est d'utiliser à l'intérieur du domaine Ω_{fis}^ε et de la couche fissurée, comprise en les cotes $z_{haut}(s)$ et $z_{bas}(s)$, une fonction d'endommagement $D(x)$ venant affecter le module d'Young, initialement égal à E^i .

Le module « apparent » $E_{i\ endo}(x)$ de cette partie de structure devient alors :

$$E_{i\ endo}(x) = (1 - D(x))E_i \quad (37)$$

avec :

$D(x) =$ fonction voisine de 1 par valeur inférieure sur l'intervalle $x_{fis} - \frac{\varepsilon}{2} < x < x_{fis} + \frac{\varepsilon}{2}$

$D(x) = 0$ à l'extérieur de celui-ci.

On ne cherche pas ici à donner de sens physique à la fonction $D(x)$. Son rôle, purement mathématique, est de rendre compte de l'effet de fissure par une valeur très faible de rigidité dans le domaine $\Omega_{fis}^\varepsilon \times [z_{haut}, z_{bas}]$.

$D(x)$ peut être choisie en particulier constante sur $[x_{fis} - \frac{\varepsilon}{2}, x_{fis} + \frac{\varepsilon}{2}]$, égale à $1 - \eta$ avec η petit, mais non strictement nul pour éviter l'introduction de termes infinis dans la fonctionnelle du problème¹⁹. Les applications numériques présentées en partie 4 sont effectuées de la sorte, en prenant η égal à 10^{-5} (soit $E_{i\ endo}(x) = 10^{-5}E_i$) et la largeur de fissure ε égale à 5mm.

Pour une bonne précision des résultats, il est alors nécessaire d'accompagner ces choix par l'utilisation d'éléments finis de petites dimensions, d'ordre sub-centimétrique, au voisinage des singularités géométriques, afin de permettre une interpolation convenable des champs qui présentent de fortes variabilités spatiales dans ces zones. Le maillage peut être progressivement desserré au-delà.

Il est à préciser également que la technique de prise en compte de fissure décrite ci-dessus peut se transposer sans difficulté particulière au cas de fissures débouchant en surface de chaussée.

¹⁹ Pour rappel, les formulations variationnelles mixtes font intervenir en élasticité, l'inverse des modules de rigidité des matériaux et ne peuvent donc traiter *stricto-sensu* le cas de modules nuls.

3.1.3 Vérification du fonctionnement en ouverture des fissures

Une fois le calcul M4-5n effectué selon les modalités précédentes, il conviendra en général de vérifier que l'hypothèse d'ouverture de fissure faite *a priori* sur l'ensemble de la hauteur de couche n° i est bien vérifiée.

On peut utiliser à cet effet les déplacements horizontaux normaux à la surface de fissure Ω_{fis} , obtenus dans le voisinage de celle-ci. Ainsi dans notre exemple de fissure transversale, on devra s'assurer que la quantité :

$$Ouv = U_x^i \left(x_{fis} + \frac{\varepsilon}{2}, y \right) - U_x^i \left(x_{fis} - \frac{\varepsilon}{2}, y \right) \quad (38)$$

est positive pour tout y dans Ω_{fis} , témoignant d'une ouverture des 2 bords de fissure.

3.2 Prise en compte de décollements d'interface

3.2.1 Conditions mécaniques sur la surface décollée

La modélisation d'un décollement d'interface revient essentiellement à annuler les efforts d'interface sur la surface décollée $\Omega_{decol}(x, y)$.

Deux situations principales sont à distinguer, suivant l'ouverture effective ou non de la surface de décollement sous les sollicitations considérées. Supposons que l'interface concernée soit l'interface n° $i, i + 1$.

Dans le cas d'une surface de décollement ouverte, il y a lieu d'annuler à la fois les efforts de cisaillement et d'arrachement, soit :

$$\tau_x^{i,i+1} = 0, \quad \tau_y^{i,i+1} = 0, \quad v^{i,i+1} = 0 \quad \text{pour } (x, y) \in \Omega_{decol}(x, y) \quad (39)$$

Dans le cas d'une surface restant fermée (avec des efforts « d'arrachement » se trouvant en fait en compression), seules les conditions :

$$\tau_x^{i,i+1} = 0, \quad \tau_y^{i,i+1} = 0 \quad (40)$$

sont à considérer, en supposant le glissement parfait (conditions introduites par pénalisation du Lagrangien du problème).

Ces hypothèses de modélisation sont à valider après calculs, en vérifiant dans le premier cas le signe du saut de déplacement vertical de part de d'autre de l'interface, qui doit être positif et dans le second cas en vérifiant le signe de la contrainte « d'arrachement », qui en l'occurrence doit être négatif.

Des hypothèses plus générales de loi d'interface de type Coulomb pourraient être envisagées, mais nécessitant une démarche de calcul incrémentale allant au-delà des objectifs de cette première tranche du projet DVDC²⁰.

²⁰ Certains essais instrumentés de fatigue de chaussée, réalisés sur le site FABAC de l'IFSTTAR-Nantes ont permis de mettre en évidence de tels fonctionnements relativement complexes d'interfaces, alternant en fonction de la position des charges roulantes des phases de glissement (charges en cours d'approche ou d'éloignement de la zone décollée) ou de blocage (positions de charges à la quasi-verticale de la zone décollée).

3.1.3 Traitement numérique retenu pour la prise en compte de conditions de décollement

Plaçons nous par exemple dans le cas des conditions d'interface à imposer : $\tau_x^{i,i+1} = 0$, $\tau_y^{i,i+1} = 0$, $v^{i,i+1} = 0$.

La prise en compte de ces conditions nécessiterait en toute rigueur de dédoubler le contour $\partial\Omega_{decol}(x, y)$ de l'aire $\Omega_{decol}(x, y)$ de façon à dédoubler également les degrés de liberté $\tau_x^{i,i+1}, \tau_y^{i,i+1}$ qui sont discontinus en ces points (voir annexe A6). Ils ont en effet une valeur nulle sur le bord intérieur de $\Omega_{decol}(x, y)$ et une valeur en général non nulle sur le bord extérieur.

Dans le cadre toutefois des scripts FreeFem++ que nous avons développés, nous adoptons comme dans le cas des fissures verticales, une démarche approchée « continue » consistant à introduire dans le maillage M4-5n, non seulement le contour $\partial\Omega_{decol}(x, y)$ mais aussi un second contour $\partial\Omega_{decol}^{ext}(x, y)$ légèrement extérieur au premier permettant d'assurer au travers d'un maillage serré du domaine compris entre les 2 contours, la transition entre la condition de cisaillement nul à l'intérieur de Ω_{decol} et la condition d'interface parfaitement collée à l'extérieur du domaine Ω_{decol}^{ext} .

Les conditions $\tau_x^{i,i+1} = 0$, $\tau_y^{i,i+1} = 0$, $v^{i,i+1} = 0$ sont alors imposées à travers le Lagrangien du problème, en imposant ces contraintes sur la surface Ω_{decol} au travers de nouveaux multiplicateurs de Lagrange, ayant pour expressions les déformations d'interface $D_x^{i,i+1*}$, $D_y^{i,i+1*}$ et $D_z^{i,i+1*}$ (voir annexe A6).

En notant $L(\Sigma, U^*)$ le Lagrangien précédemment obtenu en l'absence de surface de décollement, le nouveau Lagrangien s'écrit :

$$L_{decol}(\Sigma, U^*) = L(\Sigma, U^*) - \int_{\Omega_{decol}} (\tau_x^{i,i+1} D_x^{i,i+1*} + \tau_y^{i,i+1} D_y^{i,i+1*} + v^{i,i+1} D_z^{i,i+1*}) d\Omega \quad (41)$$

Mais cette intégrale se combine en fait avec celle de la même forme présente dans l'expression de $L(\Sigma, U^*)$, ce qui revient *in fine* pour ces termes à considérer l'intégrale prise sur le seul domaine $\Omega - \Omega_{decol}$, soit :

$$L_{decol}(\Sigma, U^*) = - \int_{\Omega} w_e(\Sigma) d\Omega + \int_{\Omega - \Omega_{decol}} (\tau_x^{i,i+1} D_x^{i,i+1*} + \tau_y^{i,i+1} D_y^{i,i+1*} + v^{i,i+1} D_z^{i,i+1*}) d\Omega \quad (42)$$

4. Exemples d'application : impact d'une fissure verticale et/ou d'un décollement sur la déflexion de chaussée

Les exemples considérés ici sont simplement destinés à illustrer le caractère opérationnel des scripts FreeFem++ développés sur la base des éléments précédents, dans le cadre de la Mécanique des Chaussées.

Les calculs sont effectués à géométries de défauts données.

Ces exemples seront repris dans les phases ultérieures du projet DVDC pour étudier la propagation même de tels défauts sous les chargements répétés d'un trafic routier.

Le premier calcul effectué pour une structure sans défaut, sert de référence. Il est inspiré de la fiche GB3/GB3 du catalogue 1998 des structures routières. Il nous permet au passage de comparer les modélisations M4-5nW et « Alizé » d'une même structure.

Les calculs suivant sont des variantes du premier, dans lesquels sont introduits des défauts de type « fissure verticale transversale » ou décollement d'interface.

4.1 Calcul de référence Alizé sur structure de chaussée neuve

Prenons pour structure de référence la structure GB3/GB3 du catalogue 1998 des chaussées routières, pour trafic TC5 sur plate-forme PF2, définie par les propriétés géométriques et matériaux, suivantes, avec interfaces collées :

Matériau	Epaisseur (m)	Module d'Young (MPa)	Coefficient de Poisson
BBSG3	0,08	7000	0,35
GB3	0,13	9000	0,35
GB3	0,13	9000	0,35
Plate-forme	Infini	50	0,35

Tableau 1 : Modélisation Alizé de structure GB3/GB3

Prenons aussi pour charge de référence, le jumelage standard français d'un poids total de 0,0325 MN, modélisé par deux empreintes circulaires de rayon 0,125m, de centres distants de 0,375m et soumises à la pression uniforme de 0,662 MPa.

Le calcul « Alizé »²¹ de cette structure conduit entre autres aux résultats suivant que nous comparerons aux résultats M4-5nW :

Déflexion sous entre-jumelage	V (surface chaussée) 40/100 mm	
	Déformation ε_{xx} (μdef)	Cont. σ_{xx} (BBSG3) (MPa)
Interface BBSG3/GB3 sous axe jumelage (z=0,08m)	-19	-0,30
Interface GB3/GB3 sous axe jumelage (z=0,21m)	16	σ_{xx} (GB3) 0,15
Interface GB3/GNT sous axe jumelage (z=0,34m)	58	σ_{xx} (GB3) 0,75

Tableau 2 : Déflexion, déformations et contraintes extraites du calcul de référence Alizé

²¹ On appelle « calcul Alizé » un calcul basé sur la solution du modèle multicouche élastique de Burmister utilisé en dimensionnement routier usuel.

Nota : on utilise ici les conventions de signe classiques des milieux continus (tractions, extensions positives ; compressions, contractions négatives), opposées aux conventions Alizé.

Nous associons à cette structure le modèle de référence M4-5nW suivant, constitué de 2 couches sur ressorts de Winkler. La couche n°1 coïncide avec la couche de surface, la couche n°2 représente globalement les 2 couches de GB3.

Matériau	Epaisseur (m)	Module d'Young (MPa)	Coefficient de Poisson
BBSG3	0,08	7000	0,35
GB3	0,26	9000	0,35
Plate-forme	sans objet	Ressort de Winkler de « raideur » K à déterminer (MPa/m)	sans objet

Tableau 3 : Modélisation M4-5nW de la structure GB3/GB3

Le domaine M4-5nW maillé (figure 1) est un carré de 10m de côté ($-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$), auquel on impose les conditions limites mentionnées précédemment, revenant à bloquer les déplacements normaux aux bords du maillage et à imposer des contraintes tangentielles nulles.

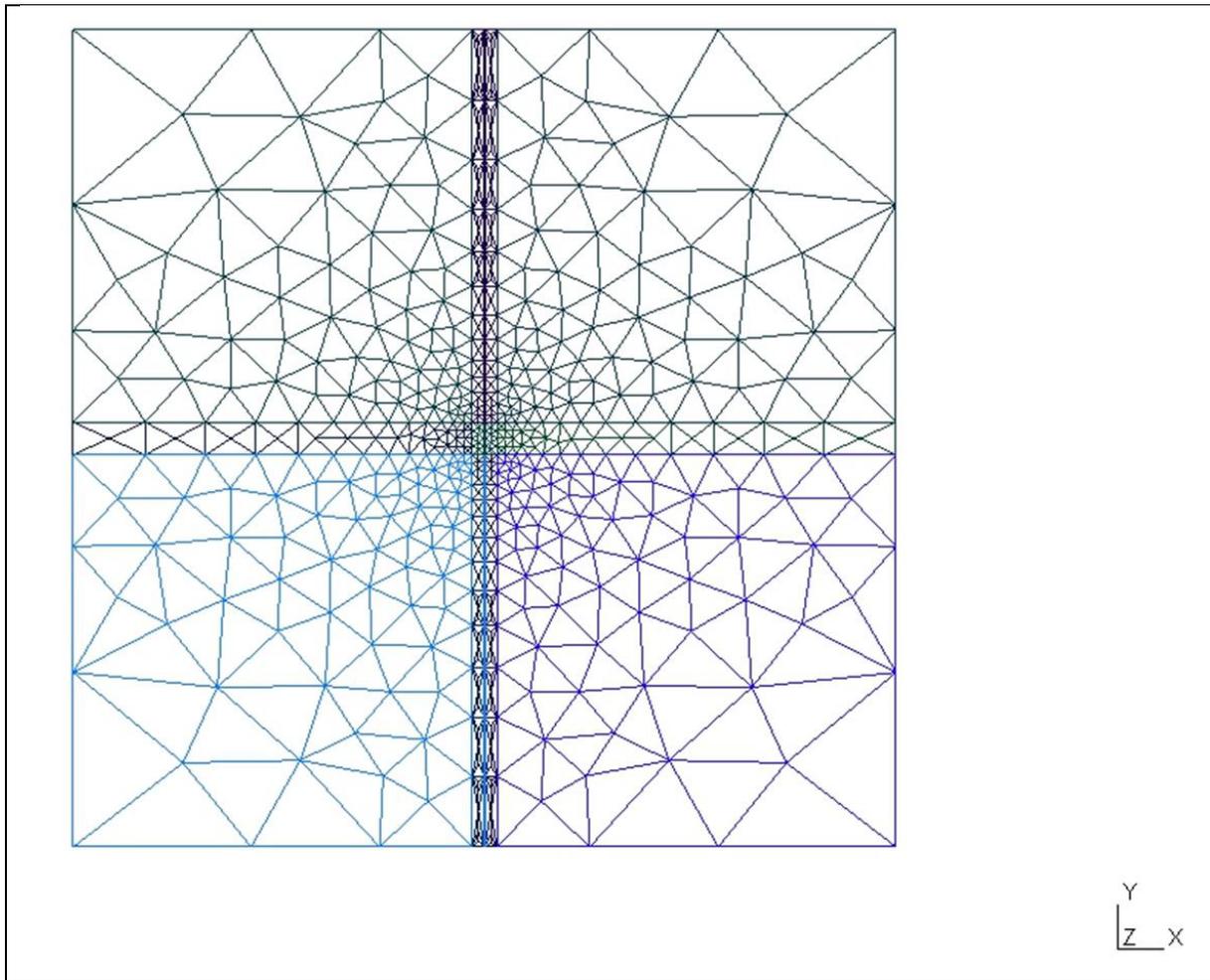


Figure 1 : Maillage M4-5nW 2D utilisé pour les calculs FreeFem++ de cet exemple. L'origine du repère $(0, x, y)$ est située au centre du maillage. Le domaine maillé a pour limites $-5m \leq x \leq 5m, -5m \leq y \leq 5m$.

Le maillage est constitué à partir des éléments triangulaires P1-P1b de FreeFem++, qui mixent « interpolations linéaires » (P1) et « interpolations par fonctions bulles » (P1b).

Le maillage prend explicitement en compte les contours du segment $(-2.5 \text{ mm} \leq x \leq 2.5 \text{ mm}, -1m \leq y \leq 1m)$ utilisé plus loin pour modéliser la présence d'une fissure inscrite dans le plan vertical $x = 0$. Il comporte également 2 lignes internes d'équation $x = \pm 0,2m$ pour tenir compte ultérieurement d'une surface de décollement à l'intérieur de cette bande.

Le modèle considéré ici ne comporte que 2 couches M4-5nW, correspondant aux matériaux bitumineux (on verra que celles-ci passent au nombre de 3 dans le cas fissuré). Un modèle de référence M4-5nW plus fin, c.-à-d. plus proche de la structure « Alizé » serait possible par l'ajout d'une troisième couche M4-5nW, représentative de la couche de GNT sur une certaine épaisseur (elle-même appuyée ou non sur ressorts de Winkler). Cette couche additionnelle permettrait de rendre compte plus fidèlement de la diffusion de contrainte au sein de la GNT que le seul emploi de ressorts de Winkler. La taille des tableaux numériques déclarés en standard dans le noyau du logiciel FreeFem++ nous a toutefois empêchés de tester cette option²².

²² Il est toutefois possible de demander d'apporter des modifications au noyau de FreeFem++ en s'adressant à l'équipe de développement et maintenance du logiciel.

Le chargement de jumelage standard est appliqué au travers des fonctions indicatrices des aires à pression uniforme, indépendamment du maillage (*i.e* sans introduction explicite du contour des disques chargés)²³.

Calage de la rigidité des ressorts de Winkler

La comparaison entre calculs Alizé et M4-5nW peut être utilisée dans un premier temps pour caler la raideur K des ressorts de Winkler. En effectuant celui-ci sur la valeur de déflexion obtenue au niveau de l'entre-jumelage (de l'ordre de 40/100 mm) positionné au centre du maillage, les calculs conduisent à retenir la valeur :

$$K = 11 \text{ MPa/m}$$

La figure 2 montre dans ces conditions les bassins de déflexion obtenus le long de l'axe x pour les 2 modèles. Les écarts de formes observés ici résultent non pas des différences d'approches théoriques entre modèle de Burmister et modèle M4-5nW, mais des différences de modélisation des structures qui prennent en compte la couche de GNT et une couche de sol infini dans le cas du modèle de Burmister et uniquement un sol de Winkler dans le cas M4-5nW.

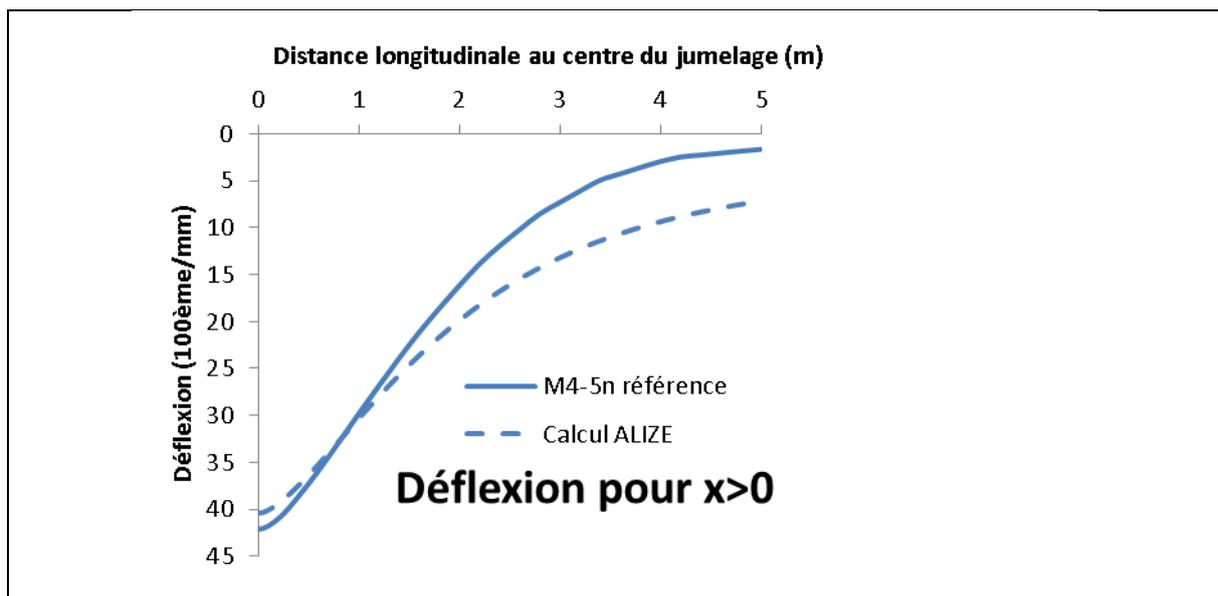


Figure 2 : Calculs de référence sur structure GB3/GB3
Courbes de déflexion Alizé et M4-5nW le long de l'axe x
(par symétrie, seul le côté $x \geq 0$ est représenté)

Résultats en déformations et contraintes

Les figures 3 et 4 montrent à titre d'exemple les cartes d'isovaleurs des déformations et contraintes ε_{xx} , σ_{xx} calculées dans ces conditions en face inférieure des couches bitumineuses (interface GB3/GNT).

²³ Il convient toutefois d'introduire dans le script de calcul une formule de correction des pressions associées aux indicatrices de façon à respecter sur chacune des aires chargées la résultante exacte des charges appliquées ($0,0325/2=0,01625$ MN par roue)

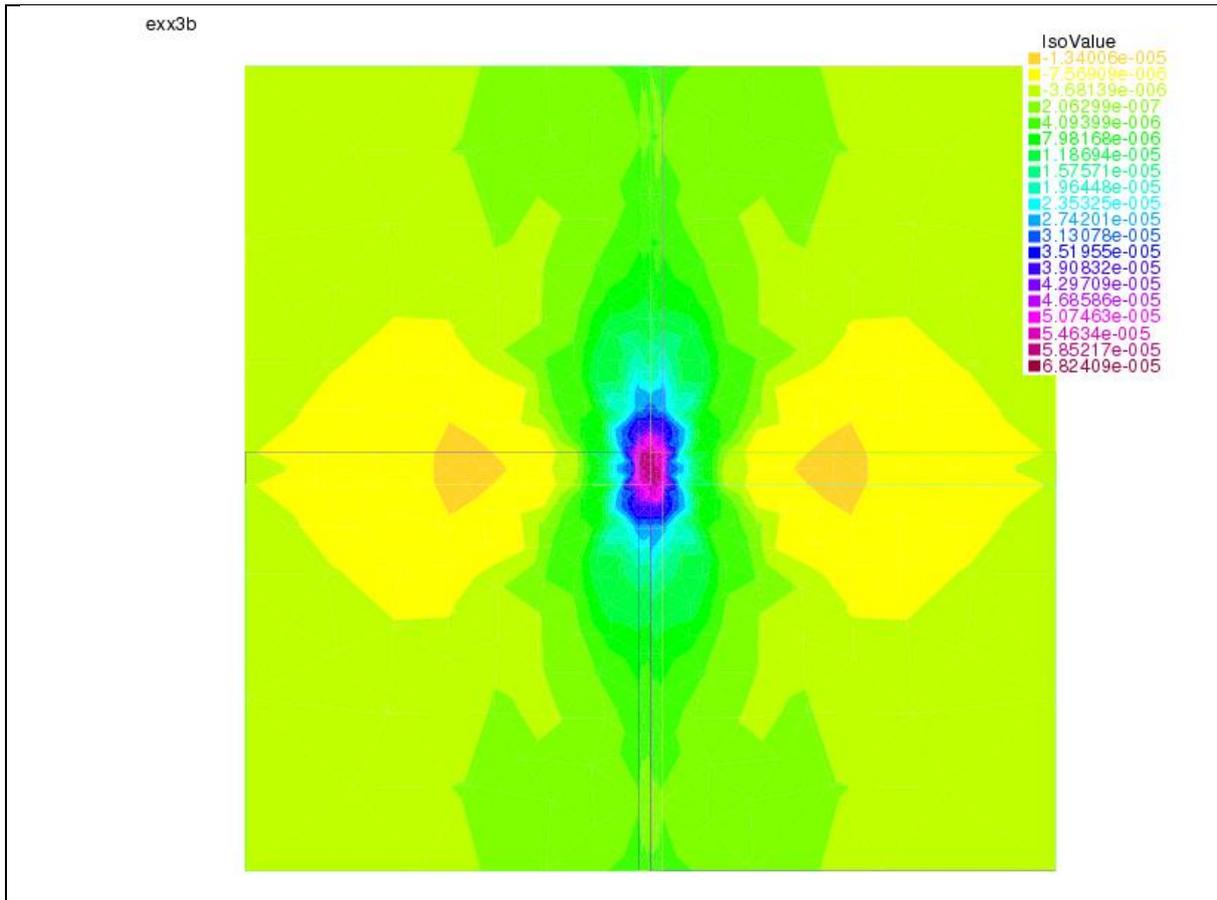


Figure 3 : Isovaleurs de déformation ϵ_{xx} calculées en base des couches bitumineuses (interface GB3/GNT). Echelle de déformation sans unité.

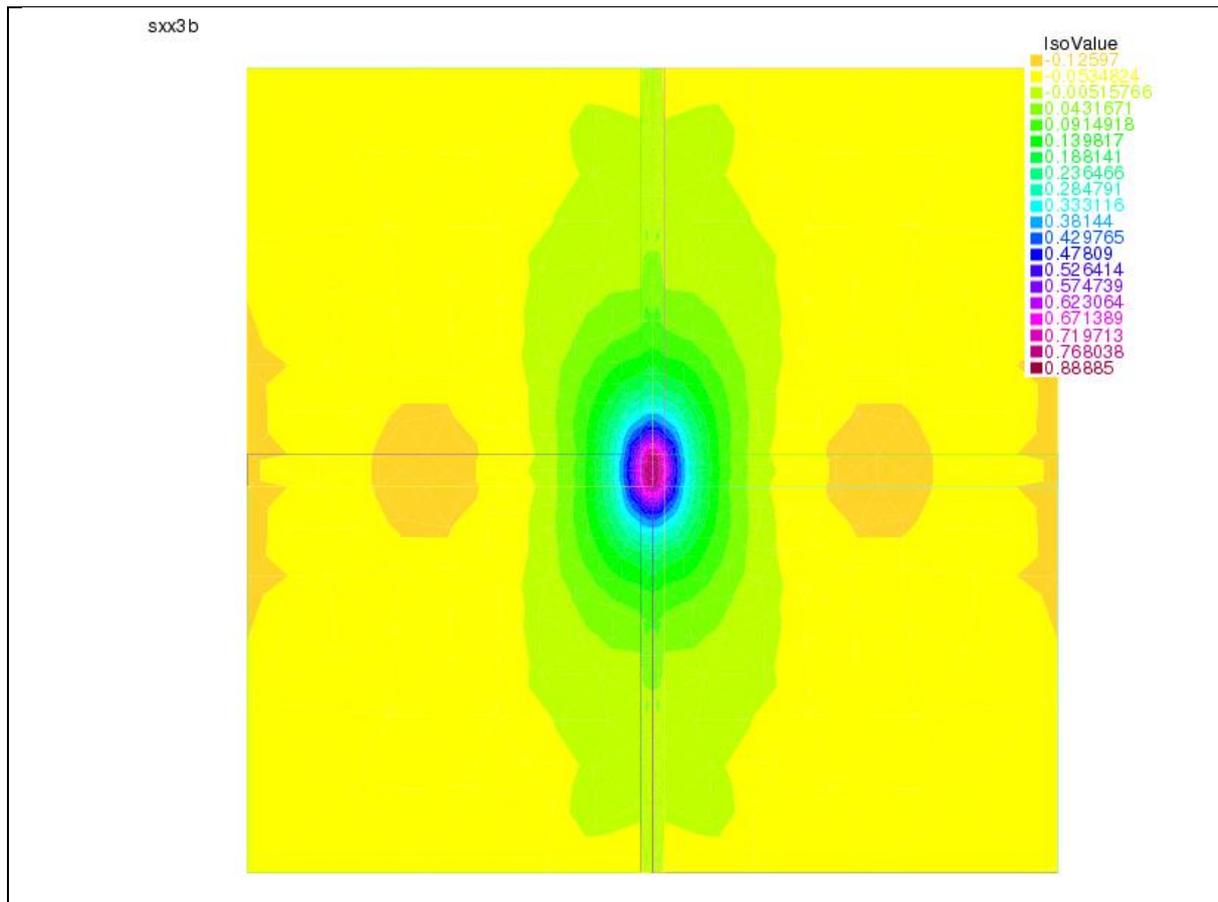


Figure 4 : Isovaleurs de contrainte σ_{xx} calculées en base des couches bitumineuses (interface GB3/GNT). Echelle de contrainte en MPa.

Le tableau 4 donne les valeurs de contrainte et déformation 3D issues du calcul M4-5nW aux mêmes points que ceux du tableau 1. Les valeurs M4-5nW et Alizé sont relativement voisines, mais présentent toutefois des écarts relevant des mêmes raisons que celles évoquées précédemment.

Dans les calculs suivant, nous ne nous intéressons qu'au modèle M4-5nW en examinant en particulier les effets relatifs produits sur les déformations et contraintes par une fissure ou un décollement.

Déflexion sous entre-jumelage	V (surface chaussée)	
	42/100 mm	(40/100 mm)
Interface BBSG3/GB3 sous axe jumelage (z=0,08m)	ε_{xx} (μdef) -33 (-19)	σ_{xx} (BBSG3) (MPa) -0,35 (-0,30)
Interface GB3/GB3 sous axe jumelage (z=0,21m)	14 (16)	σ_{xx} (GB3) 0,17 (0,15)
Interface GB3/GNT sous axe jumelage (z=0,34m)	64 (58)	σ_{xx} (GB3) 0,83 (0,75)

Tableau 4 : Déformations et contraintes 3D extraites du calcul de référence M4-5nW (en bleu, rappel des valeurs Alizé obtenues avec interface BBSG/GB collée – cf. Tableau 2)

4.2 Calcul avec fissure verticale

On considère ici la présence d'une fissure située dans le plan vertical $x = 0$, toutes autres données de la structure M4-5nW restant égales par ailleurs. En l'absence de modélisation de propagation de fissure à ce stade d'avancement de notre projet DVDC, on lui donne ici la forme arbitraire d'un « chapeau de gendarme » représenté sur la figure 5.

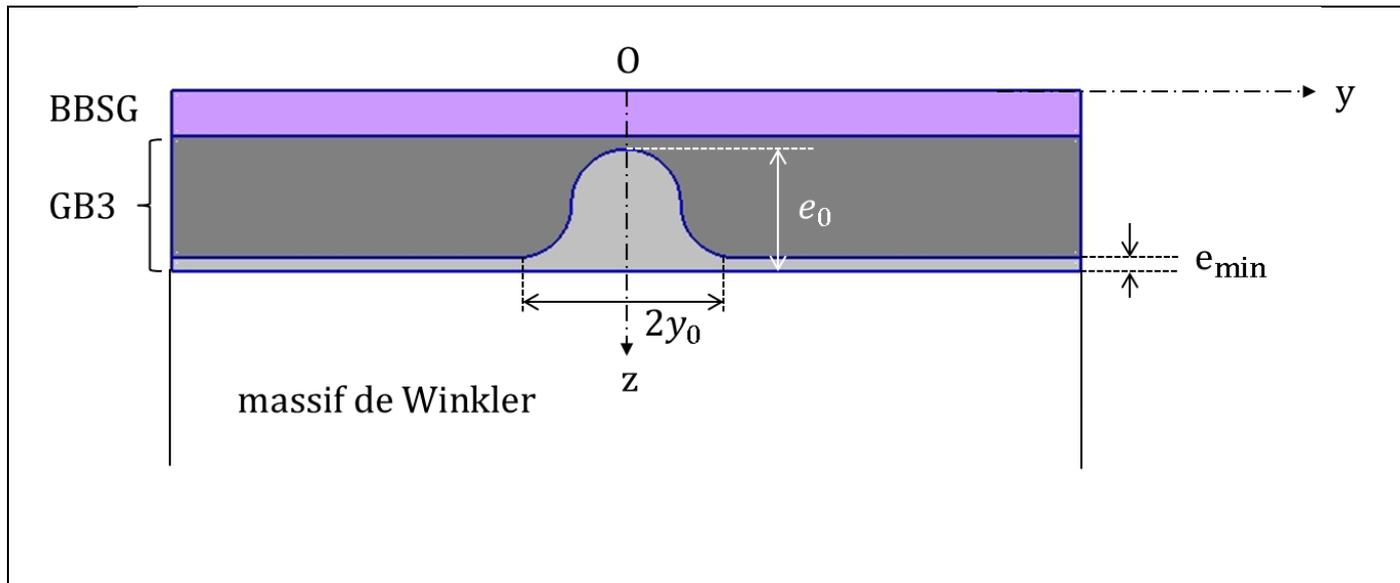


Figure 5 (figure de principe) : Modèle M4-5nW avec fissure dans le plan $x = 0$ caractérisée par le front décrit par les équations :

$$e(y) = e^0 + 3(e_{min} - e^0) \left(\frac{y}{y^0}\right)^2 - 2(e_{min} - e^0) \left(\frac{|y|}{y^0}\right)^3 \quad \text{pour } |y| \leq y^0 \quad (43)$$

$$e(y) = e_{min} \quad \text{pour } |y| \geq y^0 \quad (44)$$

(de bas en haut : couche M4-5nW n°1 de BBSG (violet), couche M4-5nW n°2 de GB3 (gris foncé), couche M4-5nW n°3 de GB3 (gris clair),

fissure = ensemble de la zone gris clair du plan $(0, y, z)$
comprise entre $y = -y^0$ et $y = y^0$

Les paramètres e^0 , e_{min} , y^0 sont respectivement pris égaux à $0,12m$, $0,01m$ et $1m$. En particulier, le sommet de fissure se situe à la cote $z = 0,22m$.

La figure 6 montre la géométrie 3D d'ensemble considérée pour la modélisation M4-5nW de la structure fissurée. Par commodité de calcul, la géométrie des couches 2 et 3 imposée au niveau du plan vertical $x = 0$, est prolongée en tout x conférant à l'interface GB3/GB3 du M4-5nW (interface non physique, introduit à des fins de modélisation) la forme d'un cylindre de génératrice d'axe x .

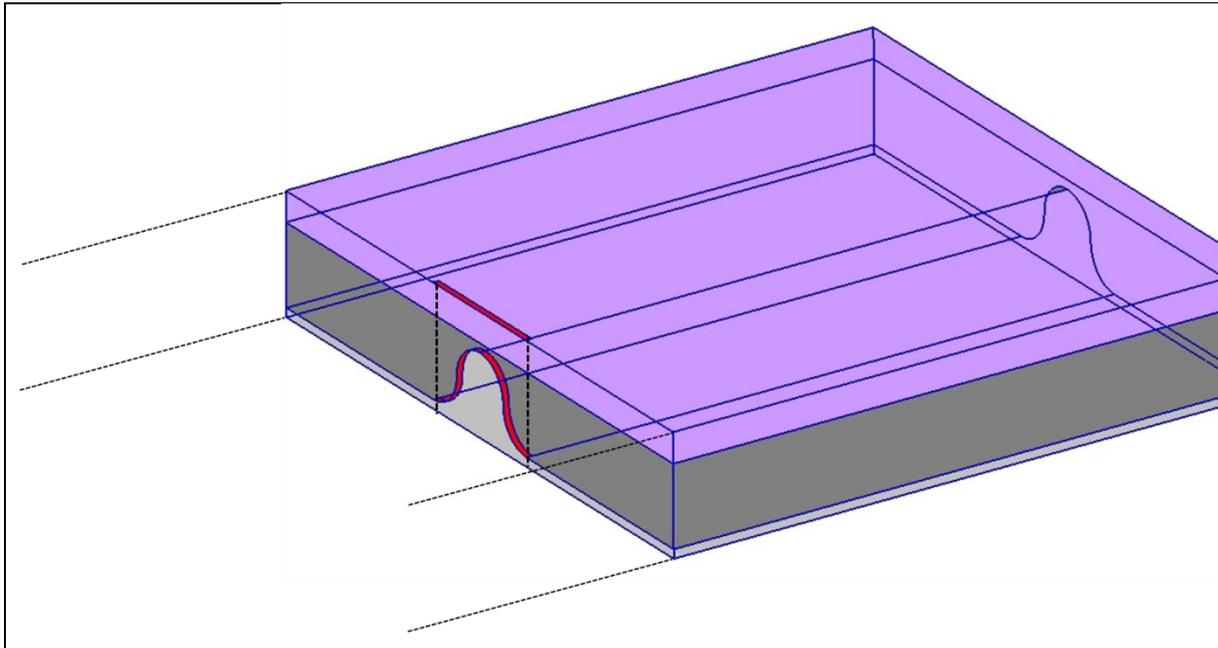


Figure 6 (figure de principe) : Géométrie 3D considérée à travers le modèle M4-5nW (ici représentation du 1/2 domaine $x \geq 0$ uniquement ; rapports d'échelle suivant x, y, z non respectés pour plus de lisibilité).

Les 2 couches physiques de GB3 d'épaisseurs constantes et parfaitement collées entre elles sont remplacées par deux couches M4-5nW, d'épaisseurs variables en y , prolongeant la géométrie du front de fissure en tout x .

Leur épaisseur globale est imposée égale à celle des 2 couches physiques (0,26m).

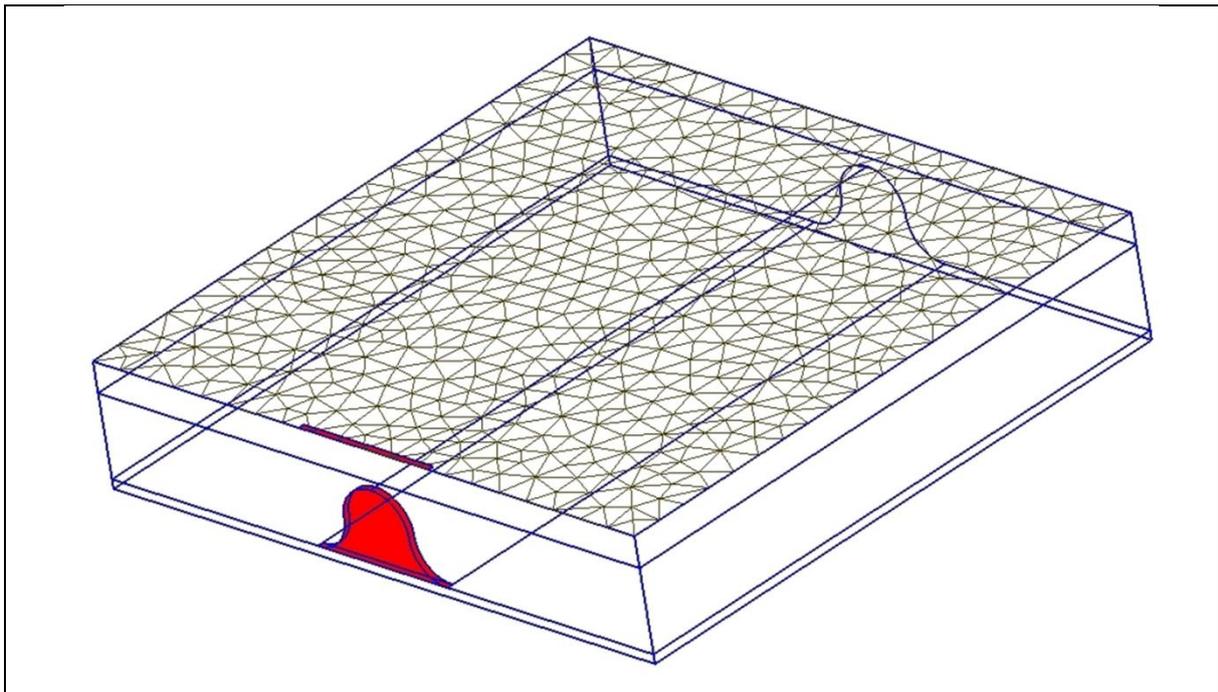


Figure 7 (figure de principe) : Maillage M4-5nW 2D associé à la structure fissurée (seul le 1/2 domaine $x \geq 0$ est ici représenté ; les échelles x,y,z sont déformées pour plus de lisibilité).

La fissure se traduit au niveau du maillage par la seule introduction du domaine rectangulaire de faible épaisseur, figuré en rouge, correspondant à la trace de la fissure 3D dans le plan (O,x,y) .

Dans le maillage de la figure 1, ce domaine est introduit sous la forme du quadrilatère :
 $-2.5 \text{ mm} \leq x \leq 2.5 \text{ mm}, -1\text{m} \leq y \leq 1\text{m}$. Son module est fixé à la valeur :

$$E_{oedo} = 10^{-5} E_{GB3}$$

Le tableau 5 présente un extrait des résultats obtenus sous l'entre-jumelage. La déflexion est à ce stade encore faiblement impactée par la fissure. En comparaison avec le tableau 4, on observe par contre une forte augmentation des déformation et contrainte $\varepsilon_{xx}, \sigma_{xx}$ à la cote = $0,21\text{m}$, qui se situe ici à 1 cm seulement du sommet de la fissure.

Déflexion sous entre-jumelage	V (surface chaussée) 42/100 mm	
	Interface BBSG3/GB3 sous axe jumelage ($z=0,08\text{m}$)	ε_{xx} (μdef) -27
1 cm au-dessus du sommet du front de fissure sous axe jumelage ($z=0,21\text{m}$)	ε_{xx} (μdef) 43	σ_{xx} (GB3) 0,38

Tableau 5 : Résultats extraits du calcul M4-5nW avec fissure

4.3 Calcul avec décollement partiel de l'interface BBSG/GB3

Les calculs suivant illustrent la prise en compte dans les calculs M4-5nW d'un décollement, avec glissement parfait, situé au niveau de l'interface physique des deux couches d'enrobés BBSG3/GB3 ($z = 0,08\text{m}$). La zone décollée est supposée limitée à une bande centrale d'axe x et de largeur 40cm ($-0,2\text{m} \leq y \leq 0,2\text{m}$) (décollement partiel dans le sens transversal).

Le tableau 6 montre des extraits des résultats obtenus à l'aplomb de l'entre-jumelage. On peut notamment observer la discontinuité de déformation ε_{xx} de part et d'autre de la bande décollée.

Le tableau 7 fournit à titre de comparaison les résultats obtenus avec le logiciel Alizé pour les deux hypothèses d'interface glissante (valeurs iniquées en noir) et d'interface collée (valeurs en bleu). Comme attendu, on peut observer que le changement d'hypothèse joue qualitativement de la même façon pour les calculs $M4 - 5nW$ et pour les calculs Alizé. Ainsi, les deux logiciels rendent compte pour toute grandeur (déflexion, déformation, contrainte) d'une même tendance à la baisse ou à la hausse de son intensité, en fonction de l'hypothèse de fonctionnement retenue pour l'interface BBSG/GB3. Par contre, les variations relatives sont bien plus importantes dans le cas des calculs Alizé que dans le cas des calculs M4-5nW. Ceci provient de la différence entre les aires considérées décollées, qui concerne tout l'interface BBSG/GB3 en pour Alizé et seulement la bande longitudinale médiane de largeur 40cm pour la modélisation M4-5nW.

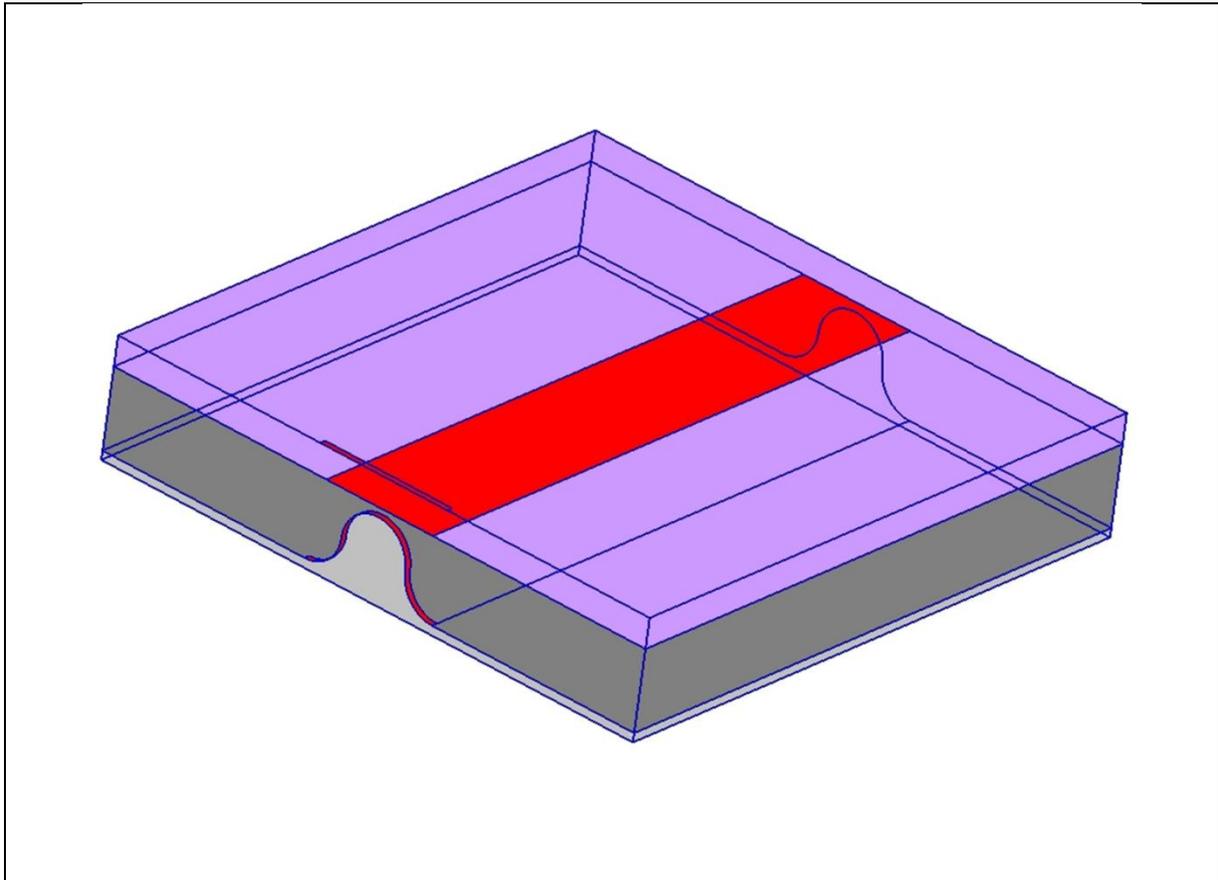


Figure 8 (figure de principe) : Maillage M4-5nW 2D associé à la prise en compte d'une surface de décollement (combinée ici à la présence éventuelle d'une fissure verticale). Seul le 1/2 domaine $x \geq 0$ est représenté ; les échelles x,y,z sont déformées pour plus de lisibilité. La présence d'une surface de décollement se traduit au niveau du maillage par l'introduction d'un sous-domaine maillé de même géométrie permettant d'annuler les contraintes de cisaillement sur l'interface M4-5nW concerné. Sur le maillage de la figure 1, ceci revient à introduire les 2 lignes internes d'équation : $x = \pm 0,2m$.

Déflexion sous entre-jumelage	V (surface chaussée)	
	43/100 mm	(42/100 mm)
De part et d'autre de l'interface BBSG3/GB3 sous axe jumelage (z=0,08m)	ε_{xx} (BBSG) (μdef) 13 (-33)	σ_{xx} (BBSG) (MPa) -0,03 (-0,35)
	ε_{xx} (GB3) -62 (-33)	
Interface GB3/GB3 sous axe jumelage (z=0,21m)	ε_{xx} (GB3) 8 (14)	σ_{xx} (GB3) 0,12 (0,17)
Interface GB3/GNT sous axe jumelage (z=0,34m)	ε_{xx} (GB3/GNT) 68 (64)	σ_{xx} (GB3) 0,88 (0,83)

Tableau 6 : Résultats extraits du calcul M4-5nW avec décollement sur bande médiane de largeur 40cm

(en bleu, rappel des valeurs M4-5nW obtenues avec interface BBSG/GB collée – cf. Tableau 4)

Déflexion sous entre-jumelage	V (surface chaussée)	
	50/100mm	(40/100 mm)
De part et d'autre de l'interface BBSG3/GB3 sous axe jumelage (z=0,08m)	ε_{xx} (BBSG) (μdef) 63 (-19)	Cont. σ_{xx} (BBSG3) (MPa) 0.37 (-0,30)
	ε_{xx} (GB3) -79 (-19)	
Interface GB3/GB3 sous axe jumelage (z=0,21m)	8 (16)	σ_{xx} (GB3) 0.01 (0,15)
Interface GB3/GNT sous axe jumelage (z=0,34m)	83 (58)	σ_{xx} (GB3) 1.04 (0,75)

Tableau 7 : Comparaisons Alizé entre interface BBSG/GB complètement décollée et interface collée (valeurs en bleu, reprises du Tableau 2)

4.4 Calcul avec fissure et décollement d'interface BBSG/GB3

Ce dernier exemple illustre la prise en compte concomitante par M4-5nW d'une fissure et d'une surface de décollement. Le calcul reprend les 2 géométries de défaut des sections 4.2 et 4.3, activées au cours du même calcul. Sur le tableau 8, on observe à la fois les augmentations de déformation et contrainte ε_{xx} , σ_{xx} provoquées par la fissure ($z = 0,21\text{m}$) et la discontinuité de déformation ε_{xx} de part et d'autre de la surface de décollement ($z = 0,08\text{m}$).

Déflexion sous entre-jumelage	V (surface chaussée)	
	43/100 mm	
De part et d'autre de l'interface BBSG3/GB3 sous axe jumelage (z=0,08m)	ε_{xx} (BBSG) (μdef) 25	σ_{xx} (BBSG) (MPa) 0,04
	ε_{xx} (GB3) -72	
1cm au-dessus sommet de fissure sous axe jumelage (z=0,21m)	ε_{xx} (GB3) 39	σ_{xx} (GB3) 0,36
Interface GB3/GNT sous axe jumelage (z=0,34m)	Sans objet (fissure)	σ_{xx} (GB3) 0

Tableau 8 : Résultats extraits du calcul M4-5nW avec fissure et décollement

Conclusion -Perspectives

Les travaux, présentés ici, entamés dans le cadre du thème 3 du Projet National DVDC, visent à offrir un outil de calcul numérique et d'expertise du comportement à échelle locale, des chaussées comportant des défauts (fissures, surfaces de décollement). Les applications pratiques devront être précisées en parallèle aux développements, mais on

peut d'ores et déjà estimer que celles-ci seront diverses par rapport aux différents besoins exprimés dans le PN (ex : aide à l'auscultation des chaussées et à l'établissement de diagnostics structurels, évaluation des effets des travaux de maintenance sur chaussées endommagées, outil d'aide à l'élaboration de guides de renforcement, aide à l'évaluation de techniques innovantes, etc.).

Le présent document, établi à l'issue de la tranche 1 de DVDC, donne une description rapide et simplifiée de la technique de modélisation M4-5n des milieux élastiques multicouches et de leur mode de résolution général par la méthode des éléments finis mixtes. On décrit également les développements spécifiques apportés en tranche 1 du PN pour la prise en compte au sein de telles structures, de fissures verticales ou surfaces de décollement sub-horizontales. Parmi ses principaux intérêts, le formalisme obtenu permet de réduire les modèles à manipuler à 2 dimensions en facilitant amplement le traitement des défauts à géométrie surfacique (fissures, décollements).

Les exemples de principe considérés dans le document montrent l'applicabilité des développements effectués à la Mécanique des Chaussées.

Les tranches suivantes de cette action de recherche DVDC seront tournées vers la modélisation de la propagation des fissures et surfaces de décollement sous les actions répétées de charges de trafic (routier, aéronautique). On transposera pour ce faire le formalisme 3D de loi de Paris au M4-5n, en évaluant en particulier dans ce cadre les quantités « équivalentes » aux coefficients de concentration de contrainte 3D, usuellement utilisés comme « moteurs » de fissuration ou de décollement des couches de chaussée. Les exemples d'application et de validation de l'outil seront choisis en fonction des sujets d'intérêt pratique du Projet National.

Bibliographie

Le développement et les applications des modèles, dits multi-particulaires, auquel appartient la famille des M4-5n, ont donné lieu à de nombreux travaux et publications, en liaison initialement avec l'étude des matériaux composites et réalisés pour une grande part à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. Leur application aux chaussées a surtout été développée par le LCPC et l'IFSTTAR. On ne liste ci-dessous que quelques-unes de ces références.

Exemples de références générales sur le modèle M4-5n

Naciri T., Ehrlacher A., Chabot A. 1998. Interlaminar Stress Analysis with a new Multiparticle Modelisation of Multilayered Materials (M4). *Composites Science and Technology*, 58 (3): 337-343. doi: 10.1016/S0266-3538(97)00085-7

Chabot A., Ehrlacher A. (18-20 nov.) 1998, "Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches M4_5n et M4_(2n+1)M pour l'étude des effets de bord". *Comptes-rendus aux 11ème Journées Nationales sur les Composites (JNC11)*, Arcachon, 3: 1389-1397. Ed. AMAC, ISBN : 2-9505117-3-2

Chabot A., Cantournet S., A. Ehrlacher (15-17 novembre) 2000, "Analyse de taux de restitution d'énergie par un modèle simplifié pour un quadricouche en traction fissuré à l'interface entre 2 couches". *Comptes-rendus aux 12ème Journées Nationales sur les Composites (JNC12)*, ENS de Cachan, 2: 775-784. Ed. AMAC, ISBN 2-9515965-0-2.

Caron J. F., Diaz Diaz A., Carreira R. P., Chabot A., Ehrlacher A. 2006. Multi-particle modelling for the prediction of delamination in multi-layered materials. *Composites Science and Technology*, 66 (6): 755-765. doi: 10.1016/j.compscitech.2004.12.022

Chabot A. (April 5) 2013, Outils d'analyse du comportement mécanique de multicouches. Thèse d'Habilitation à Diriger les Recherches de l'Université de Nantes. (<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00848650>)

Références du domaine chaussées

Tran Q. D., Chabot A., Ehrlacher A., Tamagny P., 2004. A simplified modelling for cracking in pavements. In *Rilem Proceedings* (Eds. C. Petit, I. Al-Qadi and A. Millien, PRO37-PR, ISBN 2-912143-47-0), 5th Int. RILEM Conf. Cracking in Pavements, May 5-8, Limoges, 299-306.

Chabot A., Tran Q. D., Ehrlacher A. 2005. A simplified modeling for cracked pavements / Modèle simplifié de chaussées fissurées. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et chaussées*, (258-259): 105-120. ISSN 1269-1496

Chabot, A., Tran Q. D., Ehrlacher A., 2007. A modeling to understand where a vertical crack can propagate in pavements. In *Taylor & Francis Group Proceedings* (CRC Press ISBN: 9780415448826), Int. Conf. on Advanced Characterization of Pavement and Soil Engineering Materials, June 20- 22, Athens, Greece, 1: 431-440.

Pouteau B., Balay J.-M., Chabot A., De Larrard F., 2004. Fatigue test and mechanical study of adhesion between concrete and asphalt. 9th International Symposium on Concrete Roads, 3-6 April, Istanbul, Turkey.

Chabot A., Hun M., Hammoum, F. 2013. Mechanical analysis of a mixed mode debonding test for "composite" pavements. *Construction and Building Materials*, 40: 1076-1087. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2012.11.027

Nasser H., Chabot A., 2018. A Half-analytical Elastic Solution for 2D Analysis of Cracked Pavements. *Advances in Engineering Software*, 117: 107-122. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2017.06.008>

Nasser H., Chupin O., Piau J.M., Chabot A., 2018. Mixed FEM for solving a plate type model intended for analysis of pavements with discontinuities. *Road Materials and Pavement Design*, 19 (3): 496-510, doi: 10.1080/14680629.2018.1418653 (<https://doi.org/10.1080/14680629.2018.1418653>)

Chupin O., Piau JM, Chabot A., Nasser H., Nguyen ML, Lefevre Y., 2020. Layer-Wise Modeling of Cracking Scenarios in a Bituminous Pavement Tested under FABAC ALT. In *Accelerated Pavement Testing to Transport Infrastructure Innovation - Proceedings of the 6th APT Conference*. Chabot et al. (Eds) Springer Lecture Notes for Civil Engineering.

Mémoires de thèse en étroite relation avec le sujet

Chabot A. (1997). Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de Modélisations Multiparticulaires des Matériaux Multicouches (M4). PhD thesis, ENPC, Paris. (<tel.archives-ouvertes.fr/tel-00197853/en/>)

- Tran. Q. D. (2004), Modèle simplifié pour les chaussées fissurées multicouches. Thèse de l'ENPC (ED MODES) Marne la Vallée. <https://www.theses.fr/2004ENPC0026>

- Nasser H (2016), Méthode de résolution du M4-5n par EF mixtes pour l'analyse des chaussées avec discontinuités. PhD thesis ECN (ED SPI), Nantes <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02193668>

Annexe A1 : équations complètes du M4-5n

Dans les équations suivantes :

- i est l'indice de couche
- $i, i + 1$ sont les indices de l'interface entre les couches i et $i + 1$
- α, β sont des indices se référant aux coordonnées x ou y
- $\delta_{\alpha\beta}$ est le symbole de Kronecker : $\delta_{xx} = 1, \delta_{yy} = 1, \delta_{xy} = 0$
- E^i, ν^i sont les module d'Young et coefficient de Poisson de la couche n° i

Une expression en α apporte 2 équations (en x et y). Les expressions en $\alpha\beta$ en apportent 3 (xx, yy, xy) compte-tenu de la symétrie entre les termes xy et yx .

Par convention, la répétition des indices α ou β ou k dans un même terme suppose leur sommation sur x et y ; ex : pour $\alpha = x$,

$$N_{\alpha\beta,\beta}^i = N_{xx,x}^i + N_{xy,y}^i \quad (\text{A.1})$$

A.1.1 Equations d'équilibre et conditions limites en effort

Equations d'équilibre pour la couche n° i :

$$\bullet N_{\alpha\beta,\beta}^i + \tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\bullet M_{\alpha\beta,\beta}^i - Q_{\alpha}^i + \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i}) = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\bullet Q_{\alpha,\alpha}^i + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Conditions limites en surface de chaussée (interface (0,1)) et au niveau du sol

$$\bullet \tau_x^{0,1} = 0 ; \tau_y^{0,1} = 0 \text{ (si absence d'effort de cisaillement en surface)} \quad (\text{A.5})$$

$$\bullet \nu^{0,1} = -q(x, y) \text{ (effort normal= opposé du champ de pression } q \text{ exercé en surface de chaussée ; ex : pression uniforme sous empreinte de pneu)} \quad (\text{A.6})$$

Conditions limites au niveau du sol (interface ($n, n + 1$))

- $\tau_x^{n,n+1} = 0, \tau_y^{n,n+1} = 0$ (cisaillements négligés entre sol support et couche supérieure) (A.7)
- $v^{n,n+1} = -k V_{bas}^n$ (sol de Winkler de « raideur » k ; effort normal proportionnel à la déflexion du bas de couche n^o) (A.8)

A.1.2 Equations de compatibilité cinématique

Equations de compatibilité cinématique entre déplacements et déformations généralisés de la couche n^o :

$$\bullet \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} (U_{\alpha,\beta}^i + U_{\beta,\alpha}^i) \quad (A.9)$$

$$\bullet \quad \chi_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} (\Phi_{\alpha,\beta}^i + \Phi_{\beta,\alpha}^i) \quad (A.10)$$

$$\bullet \quad d_\alpha^i = \Phi_\alpha^i + V_{,\alpha}^i \quad (A.11)$$

Equations de compatibilité cinématique entre déplacements et déformations généralisés de l'interface $n^o, i + 1$:

$$\bullet \quad D_\alpha^{i,i+1} = U_\alpha^{i+1} - U_\alpha^i - \frac{e^i}{2} \Phi_\alpha^i - \frac{e^{i+1}}{2} \Phi_\alpha^{i+1} \quad (A.12)$$

$$\bullet \quad D_3^{i,i+1} = V^{i+1} - V^i \quad (A.13)$$

A.1.3 Lois de comportement

Lois de comportement entre déformations et contraintes généralisés pour la couche n^o :

$$\bullet \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{e^i E^i} \left((1 + \nu^i) N_{\alpha\beta}^i - \nu^i N_{kk}^i \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (A.14)$$

$$\bullet \quad \chi_{\alpha\beta}^i = \frac{12}{e^i E^i} \left((1 + \nu^i) M_{\alpha\beta}^i - \nu^i M_{kk}^i \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (A.15)$$

$$\bullet \quad d_\alpha^i = \frac{12(1+\nu^i)}{5e^i E^i} Q_\alpha^i - \frac{1+\nu^i}{5E^i} (\tau_\alpha^{i-1,i} + \tau_\alpha^{i,i+1}) \quad (A.16)$$

- Lois de comportement pour l'interface $i, i + 1$:

$$D_\alpha^{i,i+1} = -\frac{1 + \nu^i}{5E^i} Q_\alpha^i - \frac{1 + \nu^{i+1}}{5E^{i+1}} Q_\alpha^{i+1} - \frac{e^i(1 + \nu^i)}{15E^i} \tau_\alpha^{i-1,i} - \frac{e^{i+1}(1 + \nu^{i+1})}{15E^{i+1}} \tau_\alpha^{i+1,i+2}$$

$$+ \frac{4}{15} \left(\frac{e^i(1+\nu^i)}{E^i} + \frac{e^{i+1}(1+\nu^{i+1})}{E^{i+1}} \right) \tau_\alpha^{i,i+1} \quad (\text{A.17})$$

$$D_3^{i,i+1} = \frac{9e^i}{70E^i} v^{i-1,i} + \frac{9e^{i+1}}{70E^{i+1}} v^{i+1,i+2} + \frac{13}{35} \left(\frac{e^i}{E^i} + \frac{e^{i+1}}{E^{i+1}} \right) v^{i,i+1} \quad (\text{A.18})$$

A.1.4 Densités d'énergie élastique de contrainte attachées aux lois de comportement

- Densité d'énergie élastique des efforts de membrane et flexion

$$w_c^i = \frac{1}{2} \left(N_{\alpha\beta}^i S_{\alpha\beta\delta\gamma}^i N_{\delta\gamma}^i + M_{\alpha\beta}^i \frac{12}{e^{i3}} S_{\alpha\beta\delta\gamma}^i M_{\delta\gamma}^i \right) \quad (\text{A.19})$$

- Densité d'énergie élastique des efforts tranchants

$$w_v^i = \frac{e^i}{4E^i} \left[\frac{1}{8} (v^{i,i+1} + v^{i-1,i})^2 + \frac{17}{35} (v^{i,i+1} - v^{i-1,i})^2 \right] \quad (\text{A.20})$$

- Densité d'énergie élastique des efforts d'arrachements

$$w_Q^i = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & Q_\alpha^i \tilde{S}_{\alpha\beta}^i Q_\beta^i + (\tau_\alpha^{i,i+1} - \tau_\alpha^{i-1,i}) \frac{e^i}{12} \tilde{S}_{\alpha\beta}^i (\tau_\beta^{i,i+1} - \tau_\beta^{i-1,i}) \\ & + \left(Q_\alpha^i - \frac{e^i}{2} (\tau_\alpha^{i,i+1} + \tau_\alpha^{i-1,i}) \right) \frac{1}{5e^i} \tilde{S}_{\alpha\beta}^i \left(Q_\beta^i - \frac{e^i}{2} (\tau_\beta^{i,i+1} + \tau_\beta^{i-1,i}) \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.21})$$

avec $S_{\alpha\beta\delta\gamma}^i, \tilde{S}_{\alpha\beta}^i$ tenseurs de souplesse membranaire et de cisaillement, donnés par:

$$\bullet \quad S_{\alpha\beta\delta\gamma}^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{E^i} & -\frac{\nu^i}{E^i} & 0 \\ -\frac{\nu^i}{E^i} & \frac{1}{E^i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G^i} \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

$$\bullet \quad \tilde{S}_{\alpha\beta}^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{G^i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G^i} \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

A.2 Lagrangien et formulation variationnelle associés à la résolution du M4-5n par méthode d'éléments finis mixtes

$$L(\Sigma, U) = - \int_{\omega} w_e d\omega + \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[U_{\alpha,\beta}^i N_{\alpha\beta}^i - U_{\alpha}^i (\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i}) + \Phi_{\alpha,\beta}^i M_{\alpha\beta}^i - \Phi_{\alpha}^i \left(-Q_{\alpha}^i + \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i}) \right) + V_{,\alpha}^i Q_{\alpha}^i - V^i (v^{i,i+1} - v^{i-1,i}) \right] d\omega - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_j^i} [U_{\alpha}^i (N_{\alpha\beta}^i n_{\beta}^i) + \Phi_{\alpha}^i (M_{\alpha\beta}^i n_{\beta}^i) + V^i (Q_{\alpha}^i n_{\alpha})] ds \quad (\text{A.24})$$

avec : n = nombre de couches

En utilisant les expressions des déformations généralisées (et en supposant par exemple $\tau_x^{0,1} = 0$, $\tau_y^{0,1} = 0$, $v^{0,1} = -q(x, y)$, $\tau_x^{n,n+1} = 0$, $\tau_y^{n,n+1} = 0$, $v^{n,n+1} = 0$) on peut également écrire :

$$L(\Sigma, U) = - \int_{\omega} (w_e + V^1 q) d\omega + \sum_{i=1}^n \int_{\omega} [\varepsilon_{\alpha\beta}^i N_{\alpha\beta}^i + \chi_{\alpha\beta}^i M_{\alpha\beta}^i + d_{\alpha}^i Q_{\alpha}^i] d\omega + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\omega} [\tau_{\alpha}^{i,i+1} D_{\alpha}^{i,i+1} + v_{\alpha}^{i,i+1} D_3^{i,i+1}] d\omega - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_j^i} [U_{\alpha}^i (N_{\alpha\beta}^i n_{\beta}^i) + \Phi_{\alpha}^i (M_{\alpha\beta}^i n_{\beta}^i) + V^i (Q_{\alpha}^i n_{\alpha})] ds \quad (\text{A.25})$$

A.3 Typologie des solutions M4-5n en un point singulier et conditions de bord en front de fissure ou surface de décollement.

On appelle ici « point singulier » d'une structure M4-5n un point situé sur le front d'une fissure verticale ou sur le contour d'une surface de décollement. On note (n_x, n_y) les composantes du vecteur unitaire sortant en ce point.

L'analyse au sens des distributions des équations cinématiques et d'équilibre du M4-5n en un point courant livrent les conditions de régularité à vérifier sur les contraintes généralisées en un tel point singulier S . De manière générale, elles impliquent pour toutes les couches la continuité des vecteurs contraintes,

$$(N_{xx}^i n_x + N_{xy}^i n_y, N_{xy}^i n_x + N_{yy}^i n_y, M_{xx}^i n_x + M_{xy}^i n_y, M_{xy}^i n_x + M_{yy}^i n_y, Q_x^i n_x + Q_y^i n_y)$$

suivant la direction (n_x, n_y) .

Dans le cas d'une fissure traversant la couche $n^{\circ}i$, les composantes $n^{\circ}i$ sont par ailleurs nulles de part et d'autre de la fissure.

L'examen des équations montrent également qu'au droit d'un point singulier les contraintes d'arrachement $v^{i,i+1}$ sont continues, sans qu'il soit nécessaire de tenir compte explicitement de cette condition dans la résolution des problèmes.

En revanche l'effort de cisaillement $(\tau_x^{i,i+1}, \tau_y^{i,i+1})$ est susceptible de subir un saut au niveau du point S . Dans le cas d'une fissure, les 2 valeurs de part et d'autre de ce point découlent de la résolution d'ensemble du problème (cas de fissure). Dans le cas d'un décollement, les composantes $(\tau_x^{i,i+1}, \tau_y^{i,i+1})$ sont à imposer, égales à 0 du côté du point S^+ situé sur la surface de décollement, les valeurs au point S^- résultant du calcul.

Selon le fonctionnement pressenti *a priori* de la surface de décollement (mode ouvert ou fermé) la contrainte d'arrachement sera imposée nulle (si ouverture) ou laissée libre. On devra s'assurer *a posteriori* de la cohérence des résultats avec l'hypothèse choisie, soit :

- vérification de l'ouverture de l'aire décollée, à partir des déplacements verticaux de ses lèvres, si hypothèse $v^{i,i+1} = 0$;
- vérification d'un état de contrainte normale en compression (valeur de signe négatif), si hypothèse de glissement sans décollement.

En résumé, les conditions mécaniques à imposer explicitement au droit d'un point singulier, avec dédoublement de contour, sont les suivantes :

- Cas d'une fissure
 - continuité des vecteurs contraintes et des déplacements sur toute couche non fissurée
 - vecteur contrainte nul sur les 2 bords de la couche fissurée
 - déplacements laissés libres sur cette couche
- Cas d'un décollement
 - continuité des vecteurs contraintes et des déplacements dans toute couche
 - cisaillements d'interface nuls du côté de la surface de décollement
 - selon, le fonctionnement pressenti de l'aire décollée, valeur de $v^{i,i+1}$ imposée nulle (si décollement) ou laissée libre (si glissement sous état de compression normale).