



Projet National de recherche et développement

## RAPPORT DE RECHERCHE

# **Modélisation numérique 3D de l'endommagement des chaussées par modèle M4-5n : Fissuration de couche & Décollements d'interface**

**Développement de l'outil de calcul**

**Auteurs / Organisme :**

Olivier Chupin, Jean-Michel Piau – Université Gustave Eiffel

19/12/2022

**Thème de rattachement :**

Thème 3. Evaluation de la durée de vie résiduelle des chaussées

Sous-thème 3.1 : Approches mécanistiques

DVDC/R/041  
LC/18/DVDC/60  
Juillet 2023

## Sommaire

---

<b>Sommaire</b> .....	<b>3</b>
<b>Préambule</b> .....	<b>5</b>
<b>Résumé</b> .....	<b>5</b>
<b>Introduction</b> .....	<b>8</b>
Conventions de signe et d'écriture .....	8
<b>1. Présentation du modèle M4-5n (sans fissure)</b> .....	<b>9</b>
1.1. Aspects géométriques .....	10
1.2. Champs de déplacements généralisés du M4-5n .....	11
1.3. Champs de déformation généralisés du M4-5n et équations de compatibilité cinématique .....	12
1.4. Champs de contraintes généralisés du M4-5n et équations d'équilibre .....	13
1.5. Lois de comportement du M4-5n et densités d'énergie de contrainte associées....	16
1.6. Conditions aux limites sur le contour d'une structure M4-5nW .....	18
<b>2. Résolution du modèle M4-5n par méthode d'éléments finis mixte – Implémentation au sein du logiciel FreeFem++</b> .....	<b>19</b>
2.1. Structure du problème obtenu : linéarité, bilan équations/inconnues .....	19
2.2. Résolution du problème par méthode d'éléments finis mixtes.....	20
2.3. Prise en compte de charges en mouvement.....	24
<b>3. Prise en compte de fissures verticales et décollements d'interface</b> .....	<b>24</b>
3.1. Prise en compte de fissures verticales .....	25
3.1.1 Aspects géométriques .....	25
3.1.2 Fonction d'endommagement.....	27
3.1.3 Vérification du fonctionnement en ouverture des fissures .....	27
3.2. Prise en compte de décollements d'interface.....	28
3.2.1 Conditions mécaniques sur la surface décollée .....	28
3.2.2 Traitement numérique retenu pour la prise en compte de conditions de décollement	28
<b>4. Exemples d'application : impact d'une fissure verticale et/ou d'un décollement sur la déflexion de chaussée</b> .....	<b>29</b>
4.1. Calcul de référence Alizé sur structure de chaussée neuve.....	30
4.2. Calcul avec fissure verticale (modèle F) .....	36
4.3. Calcul avec décollement partiel de l'interface BBSG/GB3 (modèle D) .....	38
4.4. Calcul avec fissure et décollement d'interface BBSG/GB3.....	40

<b>5. Calcul du taux de restitution d'énergie élastique en théorie M4-5n.....</b>	<b>41</b>
5.1. Loi de fatigue pour structure M4-5n avec fissuration de couche .....	42
5.1.1. Calcul du taux de restitution d'énergie $G$ dans le cas d'une fissure verticale .....	42
5.1.2. Proposition n°1 de loi de Paris pour M4-5n.....	45
5.1.3. Proposition n°2 de loi de Paris pour M4-5n.....	46
5.1.4. Calculs de chaussée M4-5n avec remontée de fissure.....	48
5.2. Taux de restitution d'énergie $G$ d'une structure M4-5n soumise à une délamination d'interface.....	49
<b>6. Exemple de modélisation M4-5n de remontée de fissure par fatigue dans une chaussée 53</b>	
6.1. Technique de prise en compte de la fissure et maillage de la structure .....	54
6.2. Calculs préalables par EF usuels et par M4-5n en déformations planes, calage du modèle M4-5n .....	55
6.3. Simulation de la remontée de fissure en fatigue .....	60
<b>Conclusion -Perspectives.....</b>	<b>65</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>66</b>
<b>Annexe A1 : équations complètes du M4-5n .....</b>	<b>68</b>
A.1.1 Equations d'équilibre et conditions limites en effort .....	68
A.1.2 Equations de compatibilité cinématique .....	69
A.1.3 Lois de comportement .....	69
A.1.4 Densités d'énergie élastique de contrainte attachées aux lois de comportement ....	70
<b>A.2 Lagrangien et formulation variationnelle associés à la résolution du M4-5n par méthode d'éléments finis mixtes .....</b>	<b>71</b>
<b>A.3 Typologie des solutions M4-5n en un point singulier et conditions de bord en front de fissure ou surface de décollement.....</b>	<b>71</b>
<b>A.4 Principe du Travail Virtuel en théorie M4-5n .....</b>	<b>73</b>
A4.1 Equations d'équilibre en présence d'efforts extérieurs surfaciques .....	73
A4.2 Principe du Travail Virtuel pour M4-5n.....	74
A4.3 Application au calcul de l'intégrale $\omega \varepsilon \delta \Sigma d\omega$ .....	74

---

## Préambule

---

Ce rapport regroupe les contributions prévues sur les tranches 1 et 2 de l'action de recherche du Projet National DVDC, relative à la modélisation de l'endommagement des structures de chaussée par M4-5n. La tranche 1 correspond aux parties 1 à 4 du présent rapport et aux annexes A1, A2, A3 qui ont fait l'objet du premier livrable. La tranche 2 correspond aux parties 5 et 6 et à l'annexe A4.

Les parties 1 à 4 et les notations du premier rapport ont été légèrement retouchées ici par rapport au premier livrable pour donner une plus grande cohérence d'ensemble au présent document.

---

## Résumé

---

### Résumé

Le thème 3 du projet DVDC porte sur le développement de modèles d'évolution de l'état structurel des chaussées et sur leur application à l'estimation de la durée de vie résiduelle des chaussées, incluant la prise en compte de l'effet des travaux d'entretien.

Deux types d'approche bien distincts, pouvant s'enrichir mutuellement, sont considérés dans le thème, en fonction des échelles d'étude.

Le volet 3.2 regroupe les approches de type statistique, basées sur la formulation de lois d'évolution d'état des chaussées à l'échelle plurikilométrique des itinéraires routiers. Ces lois sont en général établies sur la base des campagnes d'auscultation des réseaux routiers.

Le volet 3.1 regroupe pour sa part les approches « mécanistiques », à échelle beaucoup plus locale (pluri-métrique), basées sur la prise en compte par modèles mécaniques des dommages se développant dans les chaussées.

Les travaux présentés ici s'inscrivent dans cet axe. Ils portent plus spécifiquement sur l'adaptation et l'utilisation dans le contexte routier du modèle mécanique, dit M4-5n, basé sur une description « essentiellement 2D », de type « empilement de plaques », des structures de chaussée<sup>1</sup>. Le principal intérêt de ce type de modèle, qui nous a paru particulièrement adapté aux objectifs du PN DVDC réside, comme on le verra plus loin, dans sa capacité à prendre en compte la présence de fissures (notamment verticales) ou de surfaces de décollement au sein des structures multicouches. Cette capacité se manifeste par deux aspects par comparaison aux approches 3D plus usuelles: d'une part l'utilisation des modèles M4-5n facilite la description géométrique des surfaces de discontinuité (fissures, décollements) ; d'autre part les valeurs des champs mécaniques du M4-5n restent bornées au voisinage des singularités géométriques, ce qui évite d'avoir à recourir aux techniques spécifiques de calcul nécessitées par la Mécanique de la Rupture (cf. méthodes de détermination des facteurs d'intensité de contrainte). Il faut bien retenir toutefois que le M4 – 5n permet de modéliser des fissures se développant en milieu 3D et donc de mieux se rapprocher potentiellement des mécanismes de dégradation hétérogènes des chaussées (ex : fissures localisées en bandes de roulement)

---

<sup>1</sup> Le développement du modèle M4-5n (cf. articles listés en fin de document, « références générales sur le modèle M4-5n ») et son acronyme sont liés à l'origine à l'étude du comportement des matériaux et structures composites. M4 est l'acronyme pour « Modèle Multiparticulaire des Matériaux Multicouches ». n désigne le nombre de couches de la structure considérée et le chiffre 5 se réfère au nombre de champs cinématiques attachés à chaque couche (en l'occurrence, les 3 composantes de déplacement des plans médians des couches et les deux composantes de rotation des normales initiales à ces plans).

que les modélisations plus habituelles 2D, effectuées en déformation planes suivant des coupes longitudinales ou transversales de la chaussée.

Les travaux rapportés ici ont ainsi vocation à déboucher sur un outil de modélisation avancée du comportement des chaussées, que l'on espère pouvoir rendre pérenne et utile à un grand nombre de travaux futurs de recherche ou d'expertise, touchant à la Mécanique des Chaussées (interprétation à un instant donné des mesures d'auscultation et de l'état structural local des chaussées, prévisions d'évolution dans le temps de l'état structural des chaussées endommagées, évaluation de l'effet des travaux d'entretien, aide au développement de guides de dimensionnement ou de renforcement, aide au développement de technologies innovantes,...).

Sur cette voie, nos perspectives sur la durée du PN DVDC sont principalement de deux ordres : l'une est d'effectuer les développements nécessaires à la prise en compte dans l'approche M4-5n de fissures et décollements se produisant et se propageant au sein des couches de chaussée ou à leurs interfaces. L'autre est d'appliquer l'outil à l'examen d'un premier cas de remontée de fissure dans une chaussée, inspiré d'un essai accéléré à échelle 1 (FABAC) réalisé sur une planche d'essai à l'Ifsttar. Le modèle est utilisé pour examiner le mode et la cinétique de remontée de fissure dans une couche d'apport bitumineuse neuve sur support fissuré.

Le point de départ des travaux envisagés est le module spécifique de modélisation des chaussées par M4-5n, développé au sein du code aux éléments finis FreeFem++ (MFEM-Fissuroute-v0), dans le cadre de la thèse de Hanan Nasser (Nasser, Nasser et al., 2018).

A partir de là, les développements numériques à effectuer sur l'ensemble des tranches du PN sont vus en trois étapes.

La première, résolue en tranche 1 du projet, consiste à généraliser dans le module Fissuroute (MFEM-Fissuroute-v1) la technique de prise en compte de fissures verticales ou surfaces de décollement horizontales, esquissée dans la thèse de H. Nasser.

Les étapes 2 et 3 font l'objet de la tranche 2 du projet. La seconde étape vise à déterminer les expressions des taux de restitution d'énergie associées à la propagation de surfaces de fissuration ou décollement en approche M4-5n. Ces expressions font apparaître des quantités locales, fonction des contraintes généralisées, susceptibles d'être le moteur d'expansion des fronts de fissure. Ces quantités sont alors couplées en étape 3 à une loi d'évolution de type « loi de Paris » qui permet de prévoir la cinétique d'endommagement en fatigue d'une chaussée, soumise à un trafic de charges roulantes.

## Abstract

This report is part of the French national project, named DVDC, which focuses on the durability and maintenance of pavements. The work reported here deals more specifically with the modeling of pavement cracking and the implementation of an associated Finite Element code, called "FissuRoute", which could be assigned several objectives in the long term.

For example:

- help in the establishment of diagnoses relating to the state of damage of pavements, by providing advanced analysis of FWD measurements;
- help predict the effect of maintenance work on the life of pavements.

The modeling technique developed here is based on "multiparticulate models" developed for multi-layer elastic media (cf. composite materials), which therefore proves to be suitable for pavement structures. The principle of these models borrows from plate theory and constitutes an extension of it in the case of multilayer structures. They thus describe the mechanical behavior of multilayers by means of "generalized" fields of displacements, deformations and

stresses, depending only on the 2 variables  $(x, y)$  of horizontal planes. The  $z$  direction (vertical) is taken into account through the construction and the definition of these generalized fields and disappears in the end from the explicit variables of the model. In a certain sense, "multilayer particulate descriptions" can be considered as corresponding to "stacking of plates", taking into account their interaction at their interfaces.

In our work, we use more precisely the model, called M4-5n, which has 5 mechanical fields per layer. We also complete this with "Winkler springs" which supports the bottom layer. These constitute an approximation of the supporting soil. The model fitted with these springs is noted M4-5nW.

The main advantage of this type of model, which seems to us particularly suited to the objectives of the DVDC project, lies in its ability to take into account the presence of cracks or of (partially) debonded interfaces within multilayer structures. This capacity manifests itself in two aspects compared to the more usual 3D approaches: on the one hand the M4-5n allows an easy geometric description of discontinuity surfaces such as vertical or horizontal cracks (debonding); on the other hand the values of the strain or stress mechanical fields of M4-5n remain finite in the vicinity of these geometrical singularities, which avoids the use of the specific computing techniques developed in Fracture Mechanics for the determination of the stress intensity factors.

In this context, our perspectives on the duration of the PN DVDC are mainly of two kinds: one is to carry out the developments necessary to take into account in the M4-5n approach cracks and debonding occurring and propagating within the pavement layers or at interfaces. The other is to apply the tool to the examination of a first case of reflected cracking in a pavement, inspired by an accelerated full-scale test (FABAC) carried out on a test section at Ifsttar. The model is used to examine the mode and the kinetics of cracking in a new bituminous layer built over a cracked support.

The starting point of the present work is the M4-5n specific pavement modeling tool, developed within the finite element code FreeFem++ (MFEM-Fissuroute-v0), as part of Hanan Nasser's thesis (Nasser, Nasser et al., 2018). From there, the numerical developments to be carried out in the course of the national project DVDC are divided in three steps. The first consists of generalizing in the Fissuroute tool (MFEM-Fissuroute-v1) the technique for taking into account vertical cracks or horizontal debonding surfaces, outlined in Nasser's thesis (phase 1 of the project). Steps 2 and 3 are the subject of phase 2 of the project. The second step aims at determining the expressions of the energy release rates associated with the propagation of cracking or debonding surfaces in the M4-5n approach. These expressions involve local quantities, function of the generalized stresses, likely to be the driving force of crack growth. These quantities are then coupled in step 3 to an evolution law of type the "Paris law" which makes it possible to predict the kinetics of fatigue damage in pavements subjected to road traffic.

## Introduction

Le présent rapport comporte 6 parties et 4 annexes, rédigées en tranches 1 (parties de 1 à 4, annexes A1 à A3) et 2 (parties 5,6, annexe A4) du PN DVDC.

La partie 1 contient une courte description du modèle M4-5n et de ses équations. Celles-ci figurent *in extenso* en annexe A1.

La partie 2 décrit les principes de résolution du modèle par la méthode aux éléments finis mixtes, mise en œuvre dans (Nasser, Nasser et al., 2018). Quelques indications sont données sur l'implémentation numérique de l'algorithme de calcul, introduit sous forme de script au sein de l'environnement logiciel FreeFem++.

La partie 3 précise les modalités de prise en compte des surfaces de discontinuité en approche M4-5n. Les sections 3.1, 3.2 traitent respectivement les cas d'une fissure verticale et d'une surface de décollement horizontale entre deux couches.

La partie 4 illustre la mise en œuvre de ces premiers éléments sur des exemples de principe, de calcul de chaussée avec fissure verticale ou/et décollement.

En partie 5 sont établies les expressions des taux de restitution d'énergie élastique, associées en approche M4-5n, à un accroissement élémentaire d'aire fissurée ou délaminée. Les calculs permettent de formuler des quantités mécaniques, fonction des contraintes généralisées du M4-5n, susceptibles de piloter localement l'expansion des fronts de fissure ou surface de décollement.

Une loi d'évolution de dommage en fatigue, de type « loi de Paris », est adjointe aux équations précédentes en partie 6 du rapport. L'ensemble permet d'obtenir un modèle complet de propagation de fissure avec prévision de la géométrie et de la cinétique d'évolution du front de fissure dans une structure multi-couches, sujette à un grand nombre de sollicitations répétées.

Le modèle est mis en œuvre en fin de rapport (partie 7) sur un tout premier exemple de principe de calcul d'endommagement par fatigue d'une chaussée soumise à un trafic de charges roulantes.

### Conventions de signe et d'écriture

Précisons quelques conventions de signe et d'écriture utilisées dans le rapport, à côté de celles employées pour décrire les quantités M4-5n.

- L'axe vertical  $z$  du repère d'espace  $(0, x, y, z)$  est orienté positivement vers le bas.
- L'origine  $0$  est située en surface de chaussée.
- Les contraintes (resp. déformations) généralisées sont comptées positivement en traction (resp. en extension).

On note :

- $\Omega$  + indice ou exposant éventuels = domaines tridimensionnels  $(x, y, z)$  relatifs aux structures représentées par M4-5n.

Ces domaines sont de « forme cylindrique » (à base non circulaire) d'axe  $z$ , compris entre les plans  $z = 0$  et  $z = z_{max}$

Exemple :

$\Omega$  = structure de chaussée avec  $z = 0$  = surface de chaussée,  $z_{max}$  = cote du substratum rigide ou du massif de Winkler



- $\omega$  + indice ou exposant éventuels = domaines plans  $(x, y)$ , associés aux modélisations M4-5n.

Ces domaines peuvent en particulier correspondre à des surfaces supérieures ou inférieures de  $\Omega$  ou à des coupes horizontales de celui-ci pour certaines valeurs de  $z$ .

Ex :

$\omega$  = domaine d'intégration des équations M4-5n

$\omega_{z=0}$  = surface de la chaussée = face supérieure du domaine  $\Omega$

$\omega_{fis}$  = aire délaminée à l'interface entre deux couches du M4-5n

- $\partial\Omega$  + indice ou exposant éventuels = surfaces verticales (variétés 2D), correspondant à des parties de frontière des domaines  $\Omega$

Ex :

$\partial\Omega_{fis}$  = fissure verticale

- $\partial\omega$  + indice ou exposant éventuels = courbes du plan  $(x, y)$  (variétés 1D), associés à des parties de frontière des domaines  $\omega$ .

Ex :

$\partial\omega_{fis}$  = trace (projection suivant  $z$ ) de  $\partial\Omega_{fis}$  sur  $\omega$

- $f_{fis} = 0$  : équation du contour de la fissure ;  $f_{fis} < 0$  pour les points situés à l'intérieur de la zone fissurée ;  $f_{fis} > 0$  pour les points situés à l'extérieur
  - $f_{fis}(z, y)$  = fonction de  $(y, z)$  pour une fissure verticale, transversale, située dans le plan  $x = 0$  (cf. modèle (F)) ;
  - $f_{fis}(x, y)$  = fonction de  $(x, y)$  pour une fissure de délamination, située dans le plan d'une interface  $(j, j + 1)$  d'équation :  $z = z^{(j, j+1)}$  (cf. modèle (D)).

## 1. Présentation du modèle M4-5n (sans fissure)

Pour une description détaillée des modèles M4-5n (construction, équations, résolution, applications), le lecteur pourra se reporter à la bibliographie, dont certaines références sont données en fin de document.

L'objectif ici est de faciliter si besoin l'appropriation du modèle par les lecteurs, en n'en retenant que les caractéristiques principales, suffisantes à bien comprendre son fonctionnement. Les équations du modèle sont rappelées *in extenso* en annexe.

On s'appuie pour ce faire sur la forte analogie existant entre le modèle M4-5n et les théories plus usuelles de poutres ou plaques introduites en RDM (résistance des matériaux) et également formulées en termes de champs mécaniques généralisés (déplacements, déformations, contraintes).

On passe en revue :

- la géométrie des modèles M4-5n en lien avec les structures de chaussée
- les champs de déplacement, déformation et contraintes généralisés qui leur sont associés
- les équations d'équilibre, de compatibilité cinématique et de comportement reliant ces champs
- la prise en compte des conditions aux limites de type déplacements ou contraintes.

## 1.1. Aspects géométriques

Le modèle M4-5n peut être vu dans son acceptation la plus simple comme un empilement de  $n$  plaques élastiques horizontales et collées les unes sur les autres dans le cas d'interfaces « parfaits ». Ce type de modèle permet de simuler avec grande précision le comportement élastique des structures composites multi-couches relativement peu épaisses, travaillant essentiellement en flexion/cisaillement, mais possiblement aussi en compression dans le cas de couches à faibles modules.

Le M4-5n est donc naturellement adapté à la modélisation mécanique des chaussées, qui sont des structures multicouches, fonctionnant en grande partie en flexion/cisaillement et en compression verticale, sous l'effet des charges de trafic. Afin de représenter le sol support d'extension semi-infinie, il convient d'ajouter au modèle une couche inférieure de ressorts, de direction verticale, fonctionnant soit indépendamment les uns des autres (M4-5n+ massif de Winkler, noté M4-5nW dans la suite), soit de façon couplée, à la façon d'un massif de Boussinesq. On se limite dans la suite aux modèles M4-5nW.<sup>2</sup>

Les modèles M4-5n ou M4-5nW sont donc caractérisés en premier lieu par leur géométrie en plan  $\omega(x, y)$  qui peut être finie ou infinie en théorie (comme dans les modèles de chaussée « Alizé » considérés en dimensionnement). On suppose dans la suite la direction  $x$  orientée suivant l'axe longitudinal de la chaussée et  $y$  dirigé suivant son axe transversal. En pratique, nous ne modéliserons que des domaines finis compte tenu de la méthode aux éléments finis retenue au niveau de la résolution du modèle, mais comme en éléments finis 3D le cas infini peut au besoin être approché autant que souhaité, en repoussant suffisamment loin les frontières de  $\omega(x, y)$ .

Dans les cas usuels, la description géométrique des modèles M4-5n devient complète en leur adjoignant les épaisseurs de couches  $e^{(i)}$  pour  $i = 1$  à  $n$ , qui définissent également implicitement les cotes  $z^{(i,i+1)}$  des diverses interfaces entre couches. En supposant la cote  $z$  nulle en surface de chaussée et **croissant vers le bas** :

$$z^{(i,i+1)} = z^{(i-1,i)} + e^{(i)} \quad (1)$$

avec :

$z^{(i,i+1)}$  = cote de l'interface située entre les couches n°  $i$  et  $i + 1$ .

$z^{(0,1)} = 0$  = cote en surface de chaussée

Nous verrons que la prise en compte de fissures conduit à généraliser cette description par la considération de sous-couches d'épaisseurs variables  $e^{(i)}(x, y)$  au sein d'un même matériau.

---

<sup>2</sup> La plupart des considérations contenues dans ce rapport s'appliquent au M4-5n comme au M4-5nW, on se restreint le plus souvent à l'appellation M4-5n. La notation M4-5nW n'est utilisée que lorsque la modélisation du support a une importance spécifique.

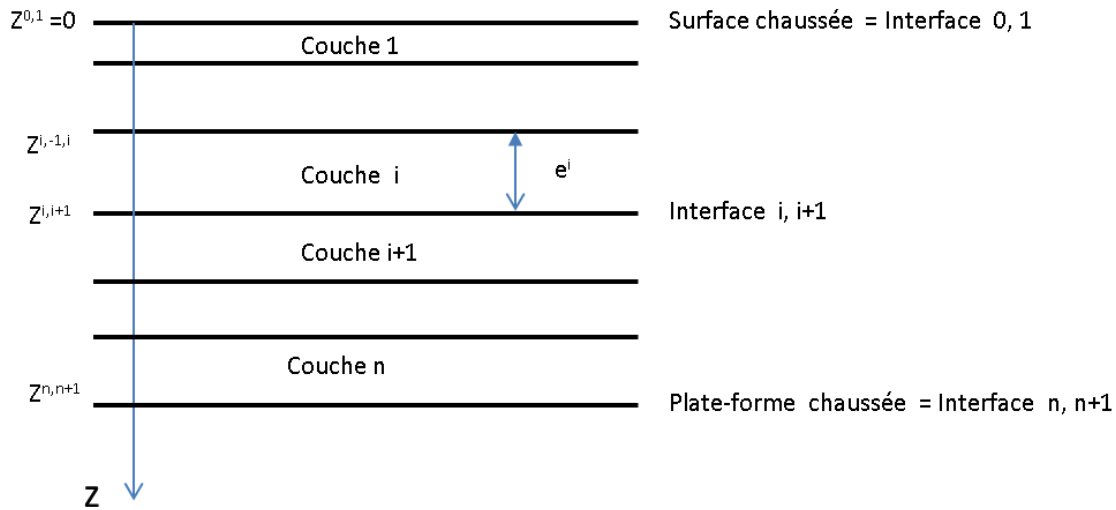


Figure 1 : Géométrie 3D multi-couche associée aux modèles M4-5n

## 1.2. Champs de déplacements généralisés du M4-5n

Nous nous plaçons ici dans le cadre des petits déplacements et petites transformations suffisant à traiter les problèmes de mécanique du comportement des chaussées.

Comme en théories de poutres ou plaques, le modèle M4-5n conduit à introduire des champs mécaniques (déplacements, déformations, contraintes) généralisés, qui « condensent » dans la direction  $z$  les champs 3D usuels de la mécanique des milieux continus. Il s'agit donc de champs qui ne dépendent que des variables  $(x, y)$ .

Les champs de déplacements généralisés du M4-5n sont ainsi au nombre de 5 par couches.

Ils sont constitués :

- des déplacements horizontaux  $U_x^{(i)}(x, y)$ ,  $U_y^{(i)}(x, y)$  et verticaux  $V^{(i)}(x, y)$  (déflexion) des plans médians des couches ( $i = \text{indice de couche}$ )
- des rotations  $\Phi_x^{(i)}(x, y)$  autour de l'axe  $x$  et  $\Phi_y^{(i)}(x, y)$  autour de l'axe  $y$  des normales initiales à ces plans.

Ces dernières sont donc considérées ici comme des degrés de liberté indépendants de la déflexion  $V^{(i)}(x, y)$ , signifiant comme en théorie générale des plaques, le fait que les normales initiales ne restent pas nécessairement normales aux plans médians des couches au cours de leur « transport » (hypothèses plus générales que les hypothèses de Bernouilli ou de Love-Kirchoff utilisées respectivement en poutre et plaque mince).

La connaissance des 5 champs précédents permet au besoin à partir d'un certain nombre de relations cinématiques de remonter aux déplacements 3D usuels de l'ensemble des points de la couche  $n^\circ i$  (champs de déplacements  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$  suivant les 3 directions d'espace  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ ).

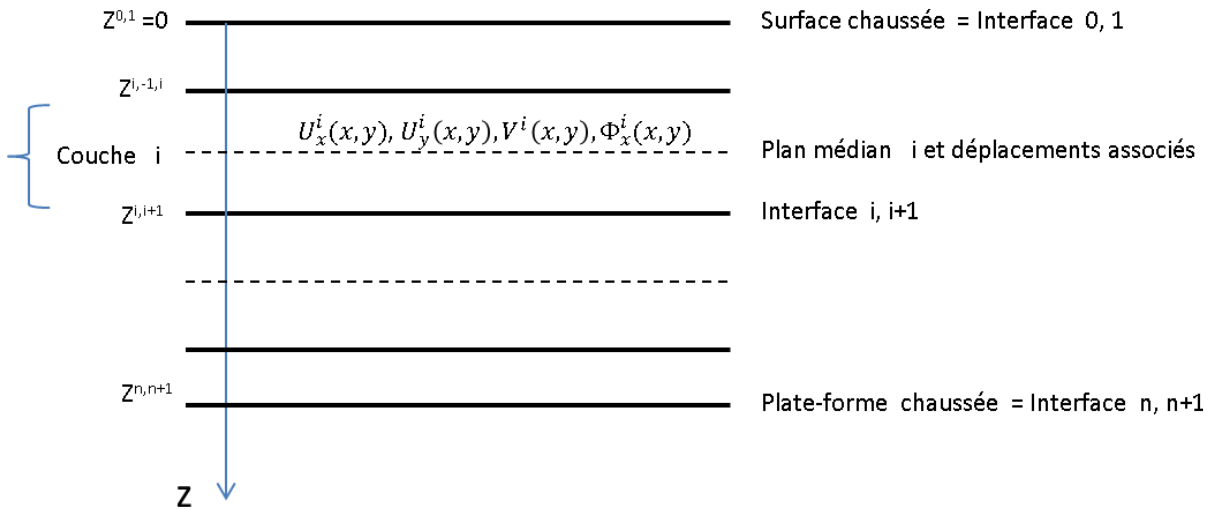


Figure 2 : Déplacements généralisés M4-5n définis au niveau des plans médians

### 1.3. Champs de déformation généralisés du M4-5n et équations de compatibilité cinématique

Les déformations généralisées du M4-5n, que l'on notera  $\mathcal{E}$  dans leur ensemble, comportent des quantités se rapportant aux couches et d'autres se rapportant aux interfaces.

Les déformations de couche sont au nombre de 8. Il s'agit des :

- déformations membranaires des plans médians ( $\varepsilon_{xx}^{(i)}, \varepsilon_{xy}^{(i)}, \varepsilon_{yy}^{(i)}$ )
- déformations de courbure des plans médians ( $\chi_{xx}^{(i)}, \chi_{xy}^{(i)}, \chi_{yy}^{(i)}$ )
- déformations de cisaillement de couche ( $d_x^{(i)}, d_y^{(i)}$ ).

Les déformations d'interface sont les déformations de cisaillement ( $D_x^{(i,i+1)}, D_y^{(i,i+1)}$ ) et normales  $D_z^{(i,i+1)}$ .

L'ensemble de ces champs est fonction des variables  $(x,y)$  et est lié aux champs de déplacements, à travers des équations de compatibilité cinématique mettant en jeu les dérivées spatiales suivant  $x$  et  $y$  (cf. annexe A.1.2).

Les déformations membranaires se déduisent ainsi des déplacements horizontaux des plans médians des couches, par les équations de compatibilité cinématique usuelles, à savoir :

$$\varepsilon_{xy}^{(i)}(x,y) = \frac{U_{x,y}^{(i)}(x,y) + U_{y,x}^{(i)}(x,y)}{2} \quad (2)$$

Les courbures des plans médians se déduisent des dérivées premières des champs de rotation des normales aux plans médians. Ainsi, par exemple :

$$\chi_{xx}^{(i)}(x, y) = \Phi_{x,x}^{(i)}(x, y) \quad (3)$$

Les déformations de cisaillement des couches se mesurent à partir de la perte d'orthogonalité en cours du transport, des directions initialement normales aux plans médians. Ainsi, par exemple :

$$d_x^{(i)} = \Phi_x^{(i)} + V_{,x}^{(i)}. \quad (4)$$

Dans le cas des hypothèses de Bernouilli ou de Love-Kirchhoff, ces quantités  $d_x^{(i)}, d_y^{(i)}$  seraient nulles et l'on retrouverait alors les relations classiques telles que  $\chi_{xx}^{(i)}(x, y) = -V_{,xx}^{(i)}(x, y)$  entre courbures et dérivées secondes des déplacements des plans médians de couche. La présente modélisation est donc plus fine.

Pour leur part, les déformations de cisaillement d'interface sont définies par l'équation suivante, qui fait intervenir la différence des déplacements horizontaux au passage d'une couche à la suivante. Ainsi par exemple:

$$D_x^{(i,i+1)} = \underbrace{U_x^{(i+1)} - \frac{e^{(i+1)}}{2} \Phi_x^{(i+1)}}_{\text{déplacements couche } n^{\circ}i+1} - \left( \underbrace{U_x^{(i)} + \frac{e^{(i)}}{2} \Phi_x^{(i)}}_{\text{déplacements couche } n^{\circ}i} \right) \quad (5)$$

Les déformations normales d'interface mesurent quant à elle les variations d'épaisseur entre plans médians de couches successives ; ainsi pour l'interface  $i, i + 1$  :

$$D_z^{(i,i+1)} = \underbrace{V^{(i+1)}}_{\text{dépl't vertical couche } n^{\circ}i+1} - \underbrace{V^{(i)}}_{\text{dépl't vertical couche } n^{\circ}i} \quad (6)$$

Ces quantités interviennent plus spécialement dans les couches de faible module (cf. GNT), qui travaillent essentiellement en déformation verticale.

Il est à noter que les déformations d'interface ont ici la dimension de déplacements, contrairement aux déformations de couches qui restent adimensionnelles.

## 1.4. Champs de contraintes généralisés du M4-5n et équations d'équilibre

Les champs de contraintes généralisés du M4-5n, que l'on notera  $\Sigma$  dans leur ensemble, comptent comme dans le cas des déformations des quantités propres aux couches et des quantités propres aux interfaces.

Les contraintes généralisées de couche au nombre de 8 sont les mêmes que celles introduites en théorie des plaques et se rattachent aux contraintes 3D de la même façon.

On compte ainsi :

- les efforts membranaires  $N_{xx}^{(i)}, N_{xy}^{(i)}, N_{yy}^{(i)}$
- les moments de flexion  $M_{xx}^{(i)}, M_{xy}^{(i)}, M_{yy}^{(i)}$

- les efforts tranchants  $Q_x^{(i)}, Q_y^{(i)}$

A titre d'exemple, les efforts  $N_{xx}^{(i)}(x, y)$  et  $M_{xx}^{(i)}(x, y)$  sont définis à partir de la contrainte 3D usuelle  $\sigma_{xx}^{3D}$  intégrée sur l'épaisseur de la couche n°i :

$$N_{xx}^{(i)}(x, y) = \int_{z^{(i-1,i)}}^{z^{(i,i+1)}} \sigma_{xx}^{3D}(x, y, z) dz \quad (7.1)$$

*effort normal s'exerçant dans la couche n°i  
par unité de longueur suivant la direction  $\vec{x}$*

$$M_{xx}^{(i)}(x, y) = \int_{z^{(i-1,i)}}^{z^{(i,i+1)}} \sigma_{xx}^{3D}(x, y, z) \left( z - \frac{z^{(i-1,i)} + z^{(i,i+1)}}{2} \right) dz \quad (7.2)$$

*moment de flexion linéique s'exerçant dans la couche n°i  
autour de l'axe  $\vec{y}$  de son plan médian*

Ces deux expressions sont identiques à celles que l'on aurait en théorie des plaques pour une plaque formée ici par la couche de matériau n°i.

Les contraintes d'interface sont au nombre de 3 par interface ; il s'agit des :

- efforts de cisaillement  $\tau_x^{(i,i+1)}, \tau_y^{(i,i+1)}$
- efforts « d'arrachement »  $\nu^{(i,i+1)}$

Il s'agit directement ici, au sens 3D usuel, des composantes du vecteur contrainte agissant sur l'interface n°  $i, i + 1$ .

Il est à noter que la dénomination « effort d'arrachement » pour désigner est quelque peu trompeuse, aux endroits où les efforts normaux d'interface sont en compression. Cette terminologie a surtout été introduite initialement pour qualifier les états de contrainte de traction, situés au voisinage des surfaces de décollement dans les structures constituées de matériaux composites

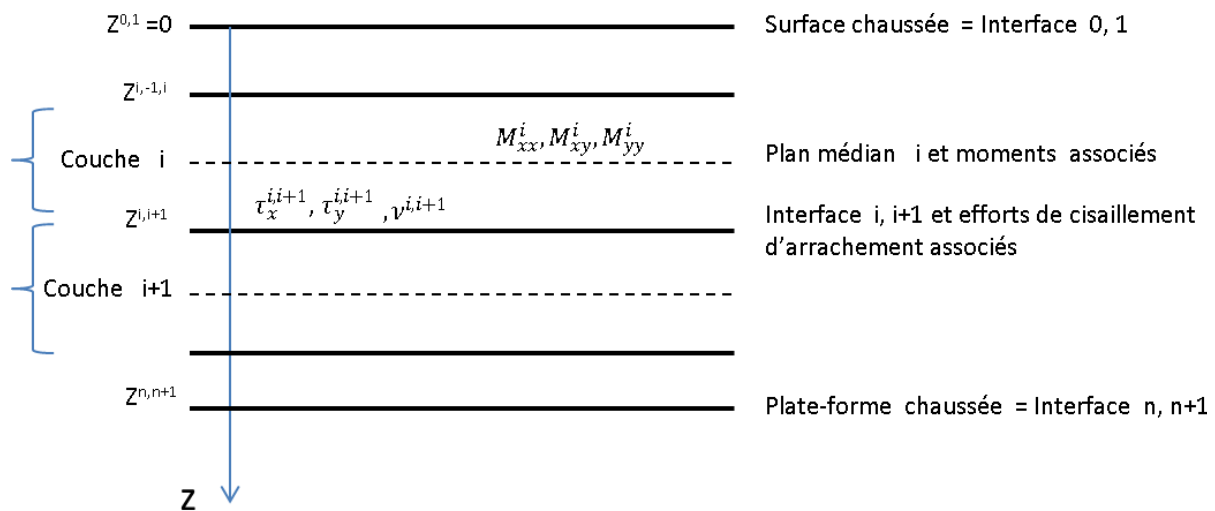


Figure 3 : Illustration des efforts généralisés M4-5n

*Ex : efforts de flexion généralisés M4-5n définis au niveau des plans médians  
Efforts de cisaillement et arrachement définis au niveau des interfaces*

Le procédé de construction du M4-5n fournit en même temps que la définition des efforts généralisés, les équations d'équilibre auxquelles ils satisfont.

Celles-ci sont au nombre de 5 par couche (cf. annexe) et sont voisines dans leur écriture des équations d'équilibre que l'on obtiendrait pour des plaques, soumises en faces supérieure et inférieure à des efforts externes, égaux aux efforts d'interface normaux et de cisaillement du M4-5n (cf. équilibre d'un empilement de plaques).

Les conditions limites en surface de chaussée s'expriment directement par la donnée des contraintes sur « l'interface (0,1) ».

Par exemple, pour un chargement constitué d'un champ de pression  $q(x, y)$  et dénué d'efforts de cisaillement <sup>3</sup>, on aura :

- $\tau_x^{(0,1)} = 0 ; \tau_y^{(0,1)} = 0$  (8)

- $v^{(0,1)} = -q(x, y)$  (9)

Les conditions limites en face inférieures du modèle M4-5nW (support de Winkler) s'écrivent quant à elles :

- $\tau_x^{(n,n+1)} = 0 ; \tau_y^{(n,n+1)} = 0$  (cisaillements négligés entre sol support et couche supérieure)

(10)

<sup>3</sup> ex :  $q(x, y) = \sum_{pneumatiques} (pression\ pneu \times indicatrice\ empreinte\ pneu(x, y))$

- $v^{(n,n+1)} = -k V^{(n)}_{bas}$  (effort normal proportionnel à la déflexion du bas de couche<sup>4</sup> n°n avec  $k$  = « raideur » du sol de Winkler) (11)

## 1.5. Lois de comportement du M4-5n et densités d'énergie de contrainte associées

Les contraintes et déformation généralisées du M4-5n sont liées en tout point entre elles, au travers de lois élastiques, construites à partir de leurs expressions en fonction des contraintes et déformations 3D et de l'hypothèse de matériaux possédant chacun ( $\forall i$ ) un comportement de type élastique linéaire isotrope.

Ces relations sont donc linéaires et s'expriment en fonction des modules d'Young et coefficients de Poisson des différentes couches du M4-5n (cf. annexe).

Elles se divisent en 2 familles :

- les équations (au nombre de 8 par couche) relatives aux déformations généralisées des couches, qui ne font intervenir que les module et coefficient de Poisson  $E^{(i)}, \nu^{(i)}$  et épaisseur  $e^{(i)}$  de la couche considérée.<sup>5</sup>

Exemple :

$$\chi_{xx}^{(i)} = \frac{12}{e^{(i)}E^{(i)}} \left( (1 + \nu^{(i)})M_{xx}^{(i)} - \nu^{(i)}(M_{xx}^{(i)} + M_{yy}^{(i)}) \right) = \frac{12}{e^{(i)}E^{(i)}} \left( M_{xx}^{(i)} - \nu^{(i)}M_{yy}^{(i)} \right) \quad (12)$$

= relation courbure/moments (cf. relation usuelle de plaque élastique).

- les équations (au nombre de 3 par couche) liées aux déformations généralisées des interfaces, qui font intervenir les coefficient de Poisson et épaisseurs des 2 couches situées de part et d'autre.

Exemple :

$$D_z^{(i,i+1)} = \frac{9e^{(i)}}{70E^{(i)}} v^{(i-1,i)} + \frac{9e^{(i+1)}}{70E^{(i+1)}} v^{(i+1,i+2)} + \frac{13}{35} \left( \frac{e^{(i)}}{E^{(i)}} + \frac{e^{(i+1)}}{E^{(i+1)}} \right) v^{(i,i+1)} \quad (13)$$

= relation entre déformation "verticale" et efforts normaux généralisés d'interface.

### Densités d'énergie de contrainte (généralisée)

Une autre façon d'exprimer l'ensemble de ces relations de comportement, qui nous sera particulièrement utile par la suite, est d'utiliser les densités d'énergie de contrainte qui leur sont associées.

<sup>4</sup> Le déplacement  $V^n_{bas}$  du bas de couche  $n$  est à bien distinguer du déplacement  $V^n$  du plan médian  $n$ , qui tient compte des déformations verticales de la couche  $n$ .  $V^n_{bas}$  n'est pas une variable explicite du M4-5n, mais peut être calculée *a posteriori*, si besoin, à partir du champ  $v^{n,n+1}$  :  $V^n_{bas} = -v^{n,n+1}/k$ .

<sup>5</sup> Bien faire la différence entre les symboles  $\nu$  et  $v$  des coefficients de Poisson et efforts d'arrachements.



Pour rappel, en prenant l'exemple simple d'un ressort de loi de comportement  $F = k U$ , son énergie élastique de « contrainte »  $W_F$  a pour valeur :

$$W_F = \frac{F^2}{2k} \quad (14)$$

Cette expression correspond ici à l'énergie élastique emmagasinée dans le ressort sous l'effet de la force  $F$  et permet comme il est facile de le voir de retrouver la loi de comportement à travers la relation :

$$U = \frac{d W_F}{d F} \quad (15)$$

De la même façon, la loi de comportement bien connue des poutres en flexion,  $\frac{d^2 y}{dx^2} = M/EI$  ( $y(x)$  =déflexion,  $M(x)$ ,  $I(x)$  =moment et inertie de flexion), peut être exprimée sous la forme ,  $y'' = \frac{d w_M}{d M}$  à partir de la densité d'énergie élastique  $w_M = \frac{M^2}{2EI}$ , définie le long de l'axe neutre de la poutre.

En généralisant cette démarche, il est alors possible d'associer au M4-5n des densités d'énergie reliant 2 à 2 les déformations et contraintes généralisées « duales » (ex : couples  $(\varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)}, N_{\alpha\beta}^{(i)})$ ,  $(\chi_{\alpha\beta}^{(i)}, M_{\alpha\beta}^{(i)})$ , ... voir ci-dessous ) permettant de retrouver l'ensemble des lois de comportement.

En l'occurrence, ces densités peuvent être scindées en 3 termes par couche, notées:

$w_c^{(i)}$  = densité d'énergie élastique des efforts de membrane et flexion

$w_v^{(i)}$  = densité d'énergie élastique des efforts tranchants

$w_Q^{(i)}$  = densité d'énergie élastique des efforts d'arrachements

et telles que:

$$\bullet \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)} = \frac{\partial w_c^{(i)}}{\partial N_{\alpha\beta}^{(i)}} \quad \text{et} \quad \chi_{\alpha\beta}^{(i)} = \frac{\partial w_c^{(i)}}{\partial M_{\alpha\beta}^{(i)}} \quad (16)$$

$$\bullet \quad d_{\alpha}^{(i)} = \frac{\partial w_Q^{(i)}}{\partial Q_{\alpha}^{(i)}} \quad (17)$$

$$\bullet \quad D_{\alpha}^{(i,i+1)} = \frac{\partial w_Q^{(i)}}{\partial \tau_{\alpha}^{(i,i+1)}} + \frac{\partial w_Q^{(i+1)}}{\partial \tau_{\alpha}^{(i,i+1)}} \quad (18)$$

$$\bullet \quad D_z^{(i,i+1)} = \frac{\partial w_v^{(i)}}{\partial v_{\alpha}^{(i,i+1)}} + \frac{\partial w_v^{(i+1)}}{\partial v_{\alpha}^{(i,i+1)}} \quad (19)$$

Les expressions de  $w_c^{(i)}$ ,  $w_v^{(i)}$ ,  $w_Q^{(i)}$  sont détaillées en annexe A1.

Ces densités d'énergies sont additives, tant au niveau de chaque couche que de l'ensemble des couches et conduisent au final à la densité d'énergie élastique totale  $w_{elas}$  emmagasinée, à contraintes données, dans le M4-5n :

$$w_{elas} = \sum_{i=1}^n (w_c^{(i)} + w_v^{(i)} + w_Q^{(i)}) \quad (20)$$

= densité d'énergie élastique en contraintes généralisées du M4-5n

L'ensemble des lois de comportement du M4-5n peut alors s'exprimer à partir de cette seule quantité. On peut écrire de façon globale :

$$\varepsilon = \frac{\partial w_{elas}}{\partial \Sigma}$$

avec  $\varepsilon, \Sigma$  = déformations et contraintes généralisées des structures M4-5n.

Exemples :

$$\chi_{\alpha\beta}^{(i)} = \frac{\partial w_{elas}}{\partial M_{\alpha\beta}^{(i)}} \quad (21)$$

$$D_{\alpha}^{(i,i+1)} = \frac{\partial w_{elas}}{\partial \tau_{\alpha}^{(i,i+1)}} \quad (22)$$

Le cas du M4-5nW se déduit aisément du précédent, par ajout de la densité d'énergie élastique de contrainte associée aux « ressorts surfaciques »  $k$  de Winkler, à savoir :

$$w_{Winkler} = \frac{v^{(n)}(bas)^2}{2k} \quad (23)$$

$$w_{elasW} = \sum_{i=1}^n (w_c^{(i)} + w_v^{(i)} + w_Q^{(i)}) + w_{Winkler} \quad (24)$$

= densité d'énergie élastique en contraintes généralisées du M4-5nW

## 1.6. Conditions aux limites sur le contour d'une structure M4-5nW

Comme on l'a vu, les conditions aux limites en effort, imposées en surface des modèles M4-5n (ex : aires à pression imposée) sont prises en compte à travers la donnée des contraintes généralisées  $v^{(0,1)}$  et  $\tau_x^{(0,1)}, \tau_y^{(0,1)}$ .

La définition d'un problème complet nécessite également de spécifier les conditions aux limites prévalant sur les « frontières verticales » de la structure étudiée, c-à-d sur les degrés de liberté situés en périphérie  $\partial\Omega$  du domaine plan  $\Omega(x, y)$ .

En théorie des plaques, on sait que de telles conditions peuvent être de type « appui simple », « encastrement », « moment imposés », etc...

Pour une structure M4-5n, de telles conditions se généralisent d'une part à l'ensemble des  $n$  couches du modèle et d'autre part à l'ensemble des degrés de liberté de déplacement ou du vecteur de contraintes normales généralisé propres à chaque couche.

Autrement dit, un jeu de conditions limites en un point  $(x, y)$  de  $\partial\Omega$ , de normale unitaire sortante  $(n_x, n_y)$ , consistera de manière générale en la donnée en toute couche  $n^\circ i$  de 5 quantités non liées entre elles parmi les 10 suivantes :

- $U_x^{(i)}, U_y^{(i)}, V^{(i)}, \Phi_x^{(i)}, \Phi_y^{(i)}$  (déplacement généralisés intra-couches)
- $N_{xx}^{(i)} n_x + N_{xy}^{(i)} n_y, N_{xy}^{(i)} n_x + N_{yy}^{(i)} n_y, M_{xx}^{(i)} n_x + M_{xy}^{(i)} n_y, M_{xy}^{(i)} n_x + M_{yy}^{(i)} n_y, Q_x^{(i)} n_x + Q_y^{(i)} n_y$  (vecteur contrainte généralisé intra-couche)

Par exemple, on pourra typiquement adopter sur les plans normaux à l'axe  $x$  d'un modèle de chaussée ( $n_x = \pm 1, n_y = 0$ ), les conditions limites suivantes :

$$\bullet U_x^{(i)} = 0, \Phi_x^{(i)} = 0, N_{xy}^{(i)} = 0, M_{xy}^{(i)} = 0, Q_x^{(i)} = 0 \quad (25)$$

qui, en toute cote  $z$ , reviennent à bloquer le déplacement normal suivant  $x$  et à négliger les efforts de cisaillement dans les directions  $(x, y)$  et  $(x, z)$ .

## 2. Résolution du modèle M4-5n par méthode d'éléments finis mixte – Implémentation au sein du logiciel FreeFem++

### 2.1. Structure du problème obtenu : linéarité, bilan équations/inconnues

L'ensemble des équations du problème montre que l'on a affaire à un problème aux dérivées partielles du premier ordre en  $x, y$  et linéaire dans sa totalité <sup>6</sup>.

Le tableau suivant qui établit le décompte des inconnues et des équations du modèle M4-5nW en fonction du nombre de couches  $n$  montre par ailleurs que celles-ci sont en nombres identiques, égaux en l'occurrence à  $27n+1$  (ex : 109 champs et variables pour un quadri-couche).

Tableau 1 : Récapitulatif des inconnues et équations du M4-5n

Champs inconnus*	Couche	Interface	Total
Dép. généralisés	5n		5n
Déf. généralisées	8n	3(n+1)	11n+3
Contr. généralisées	8n	3(n-1)+1**	11n-2

<sup>6</sup> Toutes les équations s'expriment linéairement par rapport aux variables et à la donnée d'entrée  $q$ . Tout champ solution vérifiera donc la propriété de linéarité :

solution sous chargement  $(a_1 q_1 + a_2 q_2) = a_1 \times sol. \text{ sous char } (q_1) + a_2 \times sol. \text{ sous char } (q_2)$

			<b>27n+1</b>
--	--	--	--------------

\* : après exclusion ici des contraintes d'interface directement connues à partir des données (conditions limites connues)

\*\* : maintien dans les inconnues de la contrainte  $v^{n,n+1}$  reliée à la condition d'appui de Winkler

Equations*	Couche	Interface	Total
Comp. cinématique	8n	3(n-1)	11n-3
Equilibre	5n		5n
Loi de comportement	8n	3(n+1)+1**	11n+4
			<b>27n+1</b>

\* : après exclusion des équations relatives aux conditions limites connues

\*\* : prise en compte de la condition d'appui de Winkler

On obtient ainsi un problème bien posé<sup>7</sup>, permettant d'associer à la donnée  $q(x, y)$  une et une seule solution.

## 2.2. Résolution du problème par méthode d'éléments finis mixtes

La bibliographie sur le M4-5n fait état de plusieurs modes de résolution de tels systèmes d'équation, soit de type semi-analytique dans certains cas particuliers, soit par différences finies.

La thèse d'Hanan Nasser a permis plus récemment de développer une méthode aux éléments finis, qui présente les avantages :

- d'un traitement numérique systématique des équations à résoudre
- d'une grande souplesse de manipulation de géométrie du modèle, particulièrement utile dans la prise en compte des fissures ou surface de décollement.

Qui plus est les développements ont eu lieu dans le logiciel FreeFem++ (Hecht), pour lequel l'implémentation se borne essentiellement à introduire sous forme de méta-langage la formulation variationnelle des problèmes aux dérivées partielles, ce qui permet de limiter en très grande partie le travail de programmation et les risques d'erreur attendant<sup>8</sup>.

La bibliothèque d'éléments finis 2D de FreeFem++ est restreinte du point de vue géométrie, à l'emploi de triangles, mais offre en revanche de nombreuses possibilités de choix des espaces fonctionnels associés aux fonctions d'interpolation (ex : voir plus loin l'utilisation de fonctions bulles).

<sup>7</sup> Les conditions précédentes ne sont pas strictement suffisantes à le montrer. La preuve s'appuie également sur les arguments énergétiques considérés plus loin.

<sup>8</sup> Un tel code évite notamment d'avoir à « descendre » au niveau de la programmation des opérations effectuées à l'échelle des éléments finis et de l'assemblage (ex : calcul de rigidité des matrices élémentaires), souvent sources d'erreurs. Toutes ces opérations sont traitées à partir de l'introduction sous forme de méta-langage de la fonctionnelle à résoudre.

Le principe de résolution, à l'origine de la méthode par éléments finis mixtes développée dans (Nasser, Nasser et al., 2018), s'appuie sur le théorème de l'énergie complémentaire, bien connu en élasticité.

Pour rappel, celui-ci dit que le champ de contraintes  $\Sigma^*$  solution d'un problème élastique est celui qui maximise l'énergie complémentaire  $E_c(\Sigma)$  de la structure considérée sur l'ensemble des champs de contrainte  $\Sigma$  statiquement admissibles.

Le théorème s'applique aussi bien pour des champs de contrainte 3D que pour des champs de contrainte généralisés.

Explicitons alors en quelques mots son application dans le cadre d'un problème de chaussée, modélisée par M4-5nW.

Notons  $\Sigma$  l'ensemble des  $11n - 2$  champs de contrainte du M4-5n.

### *Energie complémentaire du M4-5nW*

L'énergie complémentaire est la somme de l'opposé de l'énergie élastique emmagasinée dans la structure et du travail des efforts internes dans les champs de déplacements imposés en frontière de  $\Omega$ . Ceux-ci étant très généralement pris nuls, on a simplement pour la chaussée  $\Omega$  :

$$E_c(\Sigma) = - \int_{\Omega} w_{elas}(\Sigma) d\Omega \quad (26)$$

où  $w_{elas}$  est la densité d'énergie introduite en 1.5.

### *Champs de contrainte statiquement admissibles*

Par définition, ces champs sont ceux qui vérifient en tout point intérieur de  $\Omega$  les équations d'équilibre mentionnées en 1.4. ainsi que les conditions limites en effort sur la surface  $v^{(0,1)}(x, y) = -q(x, y)$  et sur le contour  $\partial\Omega$ .

Leur explicitation étant toutefois impossible dans le cas général, on va considérer le théorème de l'énergie complémentaire comme un problème de recherche de maximum sous contrainte<sup>9</sup>, qui se résout classiquement par l'introduction de Lagrangien.

### *Lagrangien associé au problème*

Notons  $S(\Sigma)(x, y)$  le « vecteur » formé par l'ensemble des équations d'équilibre et introduisons le vecteur de champs de multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda(x, y)$ , de même dimension.

Le Lagrangien  $L(\Sigma, \Lambda)$  du problème à résoudre peut alors se définir par :

---

<sup>9</sup> Terme à comprendre ici au sens « d'exigence ». Il s'agit donc d'une « exigence » sur la prise en compte de « contraintes admissibles ».

$$L(\Sigma, \Lambda) = E_c(\Sigma) + \int_{\Omega} {}^t\Lambda C(\Sigma) d\Omega = - \int_{\Omega} w_{elas}(\Sigma) d\Omega + \int_{\Omega} {}^t\Lambda C(\Sigma) d\Omega \quad (27)$$

où le terme  ${}^t\Lambda C(\Sigma)$  représente le produit scalaire en tout point  $(x, y)$  des vecteurs  $\Lambda$  et  $C(\Sigma)$ .

Il est possible sans changer la nature du problème, d'opérer sur la forme précédente des intégrations par parties permettant de diminuer le degré de dérivation des expressions mises en jeu dans  $L$  et de mieux conditionner ainsi l'étape de résolution par éléments finis (cf. annexe).

### Solution

Le champ de contraintes recherché est le champ  $\Sigma^*$  du couple  $(\Sigma^*, \Lambda^*)$  rendant ce Lagrangien stationnaire, c-à-d tel que les variations  $\delta L$  de  $L$  pour toute variation des champs  $(\delta\Sigma, \delta\Lambda)$  autour de  $(\Sigma^*, \Lambda^*)$  soient nulles. Autrement dit  $(\Sigma^*, \Lambda^*)$  sont formellement solutions du problème variationnel :

$$\forall (\delta\Sigma, \delta\Lambda) \quad \delta L(\Sigma^*, \Lambda^*)(\delta\Sigma, \delta\Lambda) = L_{,\Sigma}(\Sigma^*, \Lambda^*) \cdot \delta\Sigma + L_{,\Lambda}(\Sigma^*, \Lambda^*) \cdot \delta\Lambda = 0 \quad (28)$$

Comme par ailleurs, le champ de multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda^*$  s'avère n'être rien d'autre que le champ de déplacements solution,

$$\Lambda^* = U^* \quad (29)$$

la résolution du problème précédent conduit non seulement au calcul des champs de contrainte recherchés, mais aussi au calcul des déplacements et des déformations (à travers les équations de compatibilité cinématique).

On utilise donc dans la suite les notations  $U, \delta U, U^*$  se référant aux déplacements généralisés du M4-5n en lieu et place des notations  $\Lambda, \delta\Lambda, \Lambda^*$  moins explicites.

### Résolution par méthode d'éléments finis mixtes

La résolution du problème variationnel précédent ne peut se faire dans le cas général que sur des espaces fonctionnels de dimension finie des champs  $\Sigma, U$ . Ceci permet en effet de ramener le problème de stationnarité du Lagrangien  $L(\Sigma, U)$  à la résolution de systèmes linéaires de dimensions finies pouvant être effectués sur ordinateur. La solution obtenue devient alors une approximation de la solution théorique, mais pouvant être rendue aussi précise que souhaité par un choix suffisamment grand de la taille des espaces fonctionnels.

Une façon systématique de construction de tels espaces, que nous adoptons dans la suite est l'utilisation de la méthode des éléments finis, qui associe maillages et espaces fonctionnels. En particulier, la dimension des espaces fonctionnels  $\Sigma, U$  est en relation directe avec les nombres de nœuds et degrés de liberté des maillages utilisés dans la modélisation géométrique des structures.

En mécanique des solides déformables, la méthode des éléments finis est souvent appliquée au cas de problèmes variationnels, dont la formulation peut se ramener *in fine* à la

seule recherche des déplacements de la structure. Les inconnues principales « portées » par les nœuds du maillage sont alors les déplacements de la structure, d'où peuvent être déduits une fois ceux-ci connus, les champs « secondaires » de déformation et de contrainte.

Dans le cas présent, la recherche « simultanée » des champs solution  $\Sigma^*, U^*$  conduit à introduire des éléments finis « mixtes », ayant pour degrés de liberté non seulement les valeurs nodales des champs de déplacement généralisés, mais aussi les valeurs nodales des champs de contrainte généralisés ; d'où le nom de « méthode aux éléments finis mixtes » donnée à ce type de technique.

#### *Implémentation au sein du logiciel FreeFem++*

La résolution par méthode aux éléments finis mixtes, des problèmes de type M4-5n a été introduite sous forme de scripts au sein du logiciel FreeFem++. Ce logiciel présente le grand intérêt de ne nécessiter pour l'essentiel, que :

- l'introduction sous forme de macro-langage de la variationnelle,

$$\delta L = L_{,\Sigma}(\Sigma^*, \Lambda^*) \delta \Sigma + L_{,\Lambda}(\Sigma^*, \Lambda^*) \delta \Lambda \quad (30)$$

- et la donnée des degrés des fonctions d'interpolation choisis pour approximer chacune des composantes des champs de contraintes et déplacements généralisés<sup>10</sup>.

Il ne nécessite aucunement en revanche d'intervenir dans les processus de discrétisation (ex : programmation des nombreuses matrices types, élémentaires, associées aux différents termes de  $\delta L$ ) et de résolution liés au problème.

La structure des scripts se présente ainsi de la façon suivante :

- donnée des degrés d'interpolation des différents champs de contraintes et déplacements généralisés
- construction du maillage 2D (en plan) de la structure M4-5n à modéliser
- introduction des propriétés des couches : nombre et pour chacune d'elles :
  - épaisseurs, module d'Young, coefficient de Poisson
- définition du chargement (ex : aires rectangulaires ou circulaires, à pression uniforme) et des conditions limites en déplacement
- énoncé de la fonctionnelle  $\delta L$
- instructions de post-processing et de visualisation des résultats, éventuellement ramenés aux grandeurs usuelles<sup>11</sup> de la Mécanique des Milieux Continus (ex : constitution de tableaux de résultats XCEL, cartes d'isovaleurs,...).

<sup>10</sup> Une attention toute particulière doit être apportée à ces choix dans les méthodes aux éléments finis mixtes de façon à obtenir *in fine* un système algébrique inversible.

<sup>11</sup> Ex : déplacements, tenseurs de déformation ou de contraintes 3D en tout point donné (x,y,z) de la chaussée

## 2.3. Prise en compte de charges en mouvement

Il peut être utile en Mécanique des Chaussées de reproduire l'effet de charges en mouvement (d'intensités constantes) afin d'étudier plus complètement l'évolution des champs mécaniques au passage d'un véhicule.

En auscultation par exemple, ceci permet d'interpréter les mesures de déflexion ou de déformation réalisées au passage d'un véhicule non seulement en fonction des valeurs maximales atteintes, mais plus largement en fonction de l'ensemble des mesures acquises au cours du déplacement du véhicule, qui peuvent aussi se révéler riches d'informations sur le fonctionnement des chaussées.

Dans le présent projet, ceci nous permettra d'examiner plus tard les variations d'efforts en front de fissure ou décollement d'interface, en fonction de la position des véhicules et l'incidence des charges de trafic routier sur les processus d'extension de ces dommages.

A partir du script décrit précédemment, il est facile de reproduire cet effet de charges roulantes, à amplitudes de forces constantes. Dans le cadre d'un algorithme non incrémental (autorisé tant qu'on reste en élasticité), il suffit d'encapsuler les instructions précédentes dans une boucle permettant de faire évoluer la position  $x_{char}$  de la charge<sup>12</sup> par pas discrets de valeur  $\Delta x_{char}$  choisie.

Les calculs peuvent être effectués à maillage constant, indépendant de la position de charge, sans chercher à faire coïncider bords de charge et bords d'éléments, en utilisant l'indicatrice  $Ind_{char}(x, y; x_c)$  de l'empreinte de la charge<sup>13</sup>.

## 3. Prise en compte de fissures verticales et décollements d'interface

Sur la base des éléments venant d'être décrits, nous souhaitons au sein du projet DVDC développer plus spécifiquement des modélisations M4-5n susceptibles de rendre compte de fissures ou décollements d'interface, se propageant dans les structures de chaussée.

Le problème revêt deux aspects :

- le calcul d'une part, des champs généralisés en présence de fissures ou décollements, à géométries connues
- la propagation d'autre part de ces défauts sous l'effet de la répétition de charges engendrées par le trafic.

Dans ce rapport DVDC inscrit en tranche 1 du PN, nous nous intéressons à la première de ces questions.

Commençons ainsi par regarder la modélisation de fissures dans le cadre M4-5n.

<sup>12</sup>  $x_{char}$  peut être prise comme l'abscisse dans le repère de la chaussée de l'origine du repère lié à la charge roulante

<sup>13</sup>  $Ind_{char}(x, y; x_c)$  = pression sous la charge si le point  $(x, y)$  en surface de chaussée est dans l'aire de chargement ;  $Ind_{char}(x, y; x_c) = 0$  sinon.



### 3.1 Prise en compte de fissures verticales

Nous nous limitons ici au cas de fissures verticales planes, soit de type transversal inscrites dans des plans  $(y, z)$ , soit de type longitudinal inscrites dans des plans  $(x, z)$ . Pour simplifier l'exposé, on se place ici dans le cas d'une fissure unique, de type transversal, sachant que le cas d'une fissure longitudinale se traiterait de manière analogue.

On note ainsi  $x_{fis}$  l'abscisse longitudinale de cette fissure et  $f_{fis}(y, z) = 0$  l'équation de son contour (front de fissure), telle que :

- $f_{fis}(y, z) \leq 0$  pour les points de coordonnées  $x_{fis}, y, z$  situés dans l'aire de fissure  $\Omega_{fis}(x = x_{fis}, y, z) = \{x_{fis}\} \times \omega_{fis}(y, z)$  <sup>14</sup>; (31)
- $f_{fis}(y, z) > 0$  pour les points situés en dehors. (32)

Pour rappel, la méthode générale de prise en compte d'une fissure au sein d'une structure maillée par éléments finis, est la suivante:

- introduction d'une coupure géométrique au niveau de la surface  $\Omega_{fis}$  de la fissure, faisant apparaître ses deux bords (lèvres),  $\Omega_{fis}^-$  et  $\Omega_{fis}^+$  situés à gauche et à droite de  $x_{fis}$  et venant « s'ajouter » à la frontière extérieure de la structure ;
- dédoublement des degrés de liberté (déplacements, contraintes) initialement situés sur  $\Omega_{fis}$ , en attachant la moitié d'entre eux à la surface  $\Omega_{fis}^-$ , l'autre moitié à la surface  $\Omega_{fis}^+$ ; les premiers (resp. les seconds) décrivent la variation des champs mécaniques au voisinage de la fissure, du côté gauche (resp. du côté droit) ;
- prise en compte des conditions de bord libre sur les surfaces  $\Omega_{fis}^-$  et  $\Omega_{fis}^+$  <sup>15</sup>.

Celles-ci se traduisent par l'annulation des composantes relatives à la couche fissurée, des vecteurs contraintes, normaux à ces deux surfaces (voir annexe A3).

Toutefois, compte tenu des spécificités du code FreeFem++, nous avons adopté dans nos scripts traitant des problèmes de fissures, une technique approchée, s'inscrivant en plus droite ligne du cas sans fissure, basée sur l'introduction d'une fonction d'endommagement des propriétés des couches au lieu d'un dédoublement de l'aire  $\Omega_{fis}$ .

Détaillons quelque peu la méthode.

#### 3.1.1 Aspects géométriques

Celle-ci repose sur la modélisation géométrique de la fissure, sous forme d'un domaine maillé (non vide)  $\Omega_{fis}^\varepsilon$ , d'épaisseur  $\Delta x = \varepsilon$  petite, mais finie dans la direction  $x$ .

Pour ce faire, on pourra dans un premier temps intégrer explicitement aux contours du maillage M4-5n les traces (segments d'axes  $y$ ) des plans verticaux  $x = x_{fis}$ ,  $x^- = x_{fis} - \varepsilon/2$ ,  $x^+ = x_{fis} + \varepsilon/2$ , de façon à générer deux étroites bandes parallèles d'éléments finis, pour  $x$

<sup>14</sup>  $\omega_{fis}(y, z) = \text{trace (projection horizontale) de } \Omega_{fis}(x = x_{fis}, y, z) \text{ suivant la direction } z$

<sup>15</sup> On se place ici dans le cas d'une fissure fonctionnant en ouverture sous le chargement considéré, sans interpénétration de ses 2 lèvres. Cette condition est à vérifier *a posteriori* à partir des déplacements calculés sur les surfaces  $\Omega_{fis}^-$ ,  $\Omega_{fis}^+$ . Le cas de fissures susceptibles de se refermer sous chargement sera à envisager ultérieurement.

compris entre  $x^-$  et  $x_{fis}$  et  $x$  compris entre  $x_{fis}$  et  $x^+$  (voir Figure 8, Figure 9, Figure 10 et maillage de la Figure 4).

La géométrie  $\omega_{fis}(y, z)$  de la fissure dans le plan vertical sera introduite quant à elle à travers la définition des couches et la donnée de leurs épaisseurs.

Supposons ainsi la fissure  $\Omega_{fis}$  située dans la couche M4-5n, portant initialement le numéro  $i$  et considérons la représentation générale de  $\omega_{fis}(y, z)$  sous la forme :

$$z_{haut}(y) \leq z \leq z_{bas}(y) \text{ pour } 0 \leq y \leq l \text{ (largeur du maillage)} \quad (33)$$

où les 2 fonctions  $z_{haut}(s)$ ,  $z_{bas}(s)$  délimitent les contours « haut » et « bas » de la fissure<sup>16</sup> avec  $z_{haut}(y) \geq z^{i-1,i}$  et  $z_{bas}(y) \leq z^{i,i+1}$ .

Il conviendra alors dans ce cas général de décomposer la couche n°  $i$  en 3 « sous-couches » (au sens matériau) et d'ajouter en conséquence 2 nouvelles « couches » (au sens M4-5n) au modèle structural initial, en procédant bien entendu à la renumérotation adéquate de l'ensemble des couches<sup>17</sup>.

Les nouvelles couches auront alors les épaisseurs  $z_{haut}(y) - z^{i-1,i}$ ,  $z_{bas}(y) - z_{haut}(y)$ ,  $z^{i,i+1} - z_{bas}(y)$  variables en  $y$ , mais se verront attribuer les valeurs de module d'Young et coefficient de Poisson de la couche n°  $i$ , hormis dans le domaine  $\Omega_{fis}^\varepsilon$  pour  $x_{fis} - \frac{\varepsilon}{2} < x < x_{fis} + \frac{\varepsilon}{2}$  (voir section suivante).

On peut remarquer ce faisant que la subdivision de couche entraînée par la présence de la fissure  $\Omega_{fis}$  se répercute sur toute la longueur de la structure, indépendamment du fait que la fissure n'existe qu'en  $x = x_{fis}$ . En particulier, la géométrie  $\omega_{fis}(y, z)$  de la fissure s'impose en tout  $x$ , conférant des formes cylindriques d'axe  $x$  aux nouvelles couches.

Au besoin toutefois, comme le montre l'équation ci-dessous, des modulations d'épaisseur en  $x$  peuvent être facilement combinées aux modulations en  $y$  pour rendre compte par exemple de multi-fissures transversales possédant des faciès verticaux distincts entre elles<sup>18</sup>.

*Exemple de formules de variation d'épaisseur de couche suivant  $x$  et  $y$  pour prise en compte de deux fissures transversales situées en  $x_{fis,1}$  et  $x_{fis,2}$  et de faciès respectifs  $\{z_{haut,1}(y) z_{bas,1}(y)\}$ ,  $\{z_{haut,2}(y) z_{bas,2}(y)\}$  :*

$$(z_{haut,1}(y) - z^{i-1,i})N_1(x) + (z_{haut,2}(y) - z^{i-1,i})N_2(x) \quad (34)$$

$$(z_{bas,1}(y) - z_{haut,1}(y))N_1(x) + (z_{bas,2}(y) - z_{haut,2}(y))N_2(x) \quad (35)$$

$$(z^{i,i+1} - z_{bas,1}(y))N_1(x) + (z^{i,i+1} - z_{bas,2}(y))N_2(x) \quad (36)$$

<sup>16</sup> Pour rappel, l'axe  $z$  est supposé orienté vers le bas ; d'où l'inégalité :  $z_{haut}(s) \leq z_{bas}(s)$

<sup>17</sup> Dans le cas  $z_{haut}(y) = z^{i-1,i}$  ou  $z_{bas}(y) = z^{i,i+1}$ , il pourra être fait l'économie d'une sous-couche.

<sup>18</sup> Il est à noter que le procédé utilisé, qui met en jeu des épaisseurs de couche variables, va au-delà de la théorie M4-5n standard, formulée pour des épaisseurs constantes. On fait ici l'hypothèse que les variations d'épaisseur sont suffisamment « lentes » (suivant  $x$  et  $y$ ) pour pouvoir négliger les modifications à apporter aux équations M4-5n usuelles.

avec  $N_1, N_2 =$  fonctions d'interpolation comprises entre 0 et 1 et telles que :  $N_1(x_{fis,1}) = 1$ ,  $N_2(x_{fis,2}) = 1$ ,  $N_1(x) + N_2(x) = 1$  (+ propriétés de régularité, telle que par exemple dérivées nulles de  $N_1, N_2$  en  $x_{fis,1}$  et  $x_{fis,2}$  respectivement pour conserver des géométries « lisses »).

### 3.1.2 Fonction d'endommagement

A partir d'un maillage et d'un jeu de données constitués selon les principes précédents, une façon simple de rendre compte de la présence d'une fissure est d'utiliser à l'intérieur du domaine  $\Omega_{fis}^\varepsilon$  et de la couche fissurée, comprise en les cotes  $z_{haut}(s)$  et  $z_{bas}(s)$ , une fonction d'endommagement  $D(x)$  venant affecter le module d'Young, initialement égal à  $E^{(i)}$ .

Le module « apparent »  $E_{i\ endo}(x)$  de cette partie de structure devient alors :

$$E_{i\ endo}(x) = (1 - D(x))E_i \quad (37)$$

avec :

$D(x) =$  fonction voisine de 1 par valeur inférieure sur l'intervalle  $x_{fis} - \frac{\varepsilon}{2} < x < x_{fis} + \frac{\varepsilon}{2}$

$D(x) = 0$  à l'extérieur de celui-ci.

On ne cherche pas ici à donner de sens physique à la fonction  $D(x)$ . Son rôle, purement mathématique, est de rendre compte de l'effet de fissure par une valeur très faible de rigidité dans le domaine  $\Omega_{fis}^\varepsilon \times [z_{haut}, z_{bas}]$ .

$D(x)$  peut être choisie en particulier constante sur  $\left[x_{fis} - \frac{\varepsilon}{2}, x_{fis} + \frac{\varepsilon}{2}\right]$ , égale à  $1 - \eta$  avec  $\eta$  petit, mais non strictement nul pour éviter l'introduction de termes infinis dans la fonctionnelle du problème<sup>19</sup>. Les applications numériques présentées en partie 4 sont effectuées de la sorte, en prenant  $\eta$  égal à  $10^{-5}$  (soit  $E_{i\ endo}(x) = 10^{-5}E_i$ ) et la largeur de fissure  $\varepsilon$  égale à 5mm.

Pour une bonne précision des résultats, il est alors nécessaire d'accompagner ces choix par l'utilisation d'éléments finis de petites dimensions, d'ordre sub-centimétrique, au voisinage des singularités géométriques, afin de permettre une interpolation convenable des champs qui présentent de fortes variabilités spatiales dans ces zones. Le maillage peut être progressivement desserré au-delà.

Il est à préciser également que la technique de prise en compte de fissure décrite ci-dessus peut se transposer sans difficulté particulière au cas de fissures débouchant en surface de chaussée.

### 3.1.3 Vérification du fonctionnement en ouverture des fissures

Une fois le calcul M4-5n effectué selon les modalités précédentes, il conviendra en général de vérifier que l'hypothèse d'ouverture de fissure faite *a priori* sur l'ensemble de la hauteur de couche n°  $i$  est bien vérifiée.

<sup>19</sup> Pour rappel, les formulations variationnelles mixtes font intervenir en élasticité, l'inverse des modules de rigidité des matériaux et ne peuvent donc traiter *stricto-sensu* le cas de modules nuls.

On peut utiliser à cet effet les déplacements horizontaux normaux à la surface de fissure  $\Omega_{fis}$ , obtenus dans le voisinage de celle-ci. Ainsi dans notre exemple de fissure transversale, on devra s'assurer que la quantité :

$$Ouv = U_x^{(i)}\left(x_{fis} + \frac{\varepsilon}{2}, y\right) - U_x^{(i)}\left(x_{fis} - \frac{\varepsilon}{2}, y\right) \quad (38)$$

est positive pour tout  $y$  dans  $\Omega_{fis}$ , témoignant d'une ouverture des 2 bords de fissure.

## 3.2 Prise en compte de décollements d'interface

### 3.2.1 Conditions mécaniques sur la surface décollée

La modélisation d'un décollement d'interface revient essentiellement à annuler les efforts d'interface sur la surface décollée  $\omega_{decol}(x, y)$ .

Deux situations principales sont à distinguer, suivant l'ouverture effective ou non de la surface de décollement sous les sollicitations considérées. Supposons que l'interface concernée soit l'interface n°( $i, i + 1$ ).

Dans le cas d'une surface de décollement ouverte, il y a lieu d'annuler à la fois les efforts de cisaillement et d'arrachement, soit :

$$\tau_x^{i,i+1} = 0, \quad \tau_y^{i,i+1} = 0, \quad v^{i,i+1} = 0 \quad \text{pour } (x, y) \in \omega_{decol}(x, y) \quad (39)$$

Dans le cas d'une surface restant fermée (avec des efforts « d'arrachement » se trouvant en fait en compression), seules les conditions :

$$\tau_x^{i,i+1} = 0, \quad \tau_y^{i,i+1} = 0 \quad (40)$$

sont à considérer, en supposant le glissement parfait (conditions introduites par pénalisation du Lagrangien du problème).

Ces hypothèses de modélisation sont à valider après calculs, en vérifiant dans le premier cas le signe du saut de déplacement vertical de part de d'autre de l'interface, qui doit être positif et dans le second cas en vérifiant le signe de la contrainte « d'arrachement », qui en l'occurrence doit être négatif.

Des hypothèses plus générales de loi d'interface de type Coulomb pourraient être envisagées, mais nécessitant une démarche de calcul incrémentale allant au-delà des objectifs de cette première tranche du projet DVDC<sup>20</sup>.

### 3.2.2 Traitement numérique retenu pour la prise en compte de conditions de décollement

Plaçons nous par exemple dans le cas des conditions d'interface à imposer :  $\tau_x^{(i,i+1)} = 0$ ,  $\tau_y^{(i,i+1)} = 0$ ,  $v^{(i,i+1)} = 0$ .

<sup>20</sup> Certains essais instrumentés de fatigue de chaussée, réalisés sur le site FABAC de l'IFSTAR-Nantes ont permis de mettre en évidence de tels fonctionnements relativement complexes d'interfaces, alternant en fonction de la position des charges roulantes des phases de glissement (charges en cours d'approche ou d'éloignement de la zone décollée) ou de blocage (positions de charges à la quasi-verticale de la zone décollée).

La prise en compte de ces conditions nécessiterait en toute rigueur de dédoubler le contour  $\partial\omega_{decol}(x, y)$  de l'aire  $\Omega_{decol}(x, y)$  de façon à dédoubler également les degrés de liberté  $\tau_x^{i,i+1}, \tau_y^{i,i+1}$  qui sont discontinus en ces points (voir annexe A3). Ils ont en effet une valeur nulle sur le bord intérieur de  $\omega_{decol}(x, y)$  et une valeur en général non nulle sur le bord extérieur.

Dans le cadre toutefois des scripts FreeFem++ que nous avons développés, nous adoptons comme dans le cas des fissures verticales, une démarche approchée « continue » consistant à introduire dans le maillage M4-5n, non seulement le contour  $\partial\Omega_{decol}(x, y)$  mais aussi un second contour  $\partial\Omega_{decol}^{ext}(x, y)$  légèrement extérieur au premier permettant d'assurer au travers d'un maillage serré du domaine compris entre les 2 contours, la transition entre la condition de cisaillement nul à l'intérieur de  $\Omega_{decol}$  et la condition d'interface parfaitement collée à l'extérieur du domaine  $\Omega_{decol}^{ext}$ .

Les conditions  $\tau_x^{i,i+1} = 0$ ,  $\tau_y^{i,i+1} = 0$ ,  $v^{i,i+1} = 0$  sont alors imposées à travers le Lagrangien du problème, en imposant ces contraintes sur la surface  $\Omega_{decol}$  au travers de nouveaux multiplicateurs de Lagrange, ayant pour expressions les déformations d'interface  $D_x^{i,i+1*}$ ,  $D_y^{i,i+1*}$  et  $D_z^{i,i+1*}$  (voir annexe A1.2).

En notant  $L(\Sigma, U^*)$  le Lagrangien précédemment obtenu en l'absence de surface de décollement, le nouveau Lagrangien s'écrit :

$$L_{decol}(\Sigma, U^*) = L(\Sigma, U^*) - \int_{\Omega_{decol}} (\tau_x^{i,i+1} D_x^{i,i+1*} + \tau_y^{i,i+1} D_y^{i,i+1*} + v^{i,i+1} D_z^{i,i+1*}) d\Omega \quad (41)$$

Mais cette intégrale se combine en fait avec celle de la même forme présente dans l'expression de  $L(\Sigma, U^*)$ , ce qui revient *in fine* pour ces termes à considérer l'intégrale prise sur le seul domaine  $\Omega - \Omega_{decol}$ , soit :

$$L_{decol}(\Sigma, U^*) = - \int_{\Omega} w_{elas}(\Sigma) d\Omega + \int_{\Omega - \Omega_{decol}} (\tau_x^{i,i+1} D_x^{i,i+1*} + \tau_y^{i,i+1} D_y^{i,i+1*} + v^{i,i+1} D_z^{i,i+1*}) d\Omega \quad (42)$$

## 4. Exemples d'application : impact d'une fissure verticale et/ou d'un décollement sur la déflexion de chaussée

Les exemples considérés ici sont simplement destinés à illustrer le caractère opérationnel des scripts FreeFem++ développés sur la base des éléments précédents, dans le cadre de la Mécanique des Chaussées.

Les calculs sont effectués à géométries de défauts données.

Ces exemples seront repris dans les phases ultérieures du projet DVDC pour étudier la propagation même de tels défauts sous les chargements répétés d'un trafic routier.

Le premier calcul effectué pour une structure sans défaut, sert de référence. Il est inspiré de la fiche GB3/GB3 du catalogue 1998 des structures routières. Il nous permet au passage de comparer les modélisations M4-5nW et « Alizé » d'une même structure.

Les calculs suivants sont des variantes du premier, dans lesquels sont introduits des défauts de type « fissure verticale transversale » ou décollement d'interface.

## 4.1 Calcul de référence Alizé sur structure de chaussée neuve

Prenons pour structure de référence la structure GB3/GB3 du catalogue 1998 des chaussées routières, pour trafic TC5 sur plate-forme PF2, définie par les propriétés géométriques et matériaux, suivantes, avec interfaces collées :

Tableau 2 : Modélisation Alizé de structure GB3/GB3

Matériau	Epaisseur (m)	Module d'Young (MPa)	Coefficient de Poisson
BBSG3	0,08	7000	0,35
GB3	0,13	9000	0,35
GB3	0,13	9000	0,35
Plate-forme	Infini	50	0,35

Prenons aussi pour charge de référence, le jumelage standard français d'un poids total de 0,0325 MN, modélisé par deux empreintes circulaires de rayon 0,125m, de centres distants de 0,375m et soumises à la pression uniforme de 0,662 MPa.

Le calcul « Alizé »<sup>21</sup> de cette structure conduit entre autres aux résultats suivant que nous comparerons aux résultats M4-5nW :

Tableau 3 : Déflexion, déformations et contraintes extraites du calcul de référence Alizé

Déflexion sous entre-jumelage	V (surface chaussée) 40/100 mm	
	Déformation $\varepsilon_{xx}$ ( $\mu\text{def}$ )	Cont. $\sigma_{xx}$ (BBSG3) (MPa)
Interface BBSG3/GB3 sous axe jumelage (z=0,08m)	-19	-0,30
Interface GB3/GB3 sous axe jumelage (z=0,21m)	16	$\sigma_{xx}$ (GB3) 0,15
Interface GB3/GNT sous axe jumelage (z=0,34m)	58	$\sigma_{xx}$ (GB3) 0,75

<sup>21</sup> On appelle « calcul Alizé » un calcul basé sur la solution du modèle multicouche élastique de Burmister utilisé en dimensionnement routier usuel.

**Nota** : on utilise ici les conventions de signe classiques des milieux continus (tractions, extensions positives ; compressions, contractions négatives), opposées aux conventions Alizé.

Nous associons à cette structure le modèle de référence M4-5nW suivant, constitué de 2 couches sur ressorts de Winkler. La couche n°1 coïncide avec la couche de surface, la couche n°2 représente globalement les 2 couches de GB3.

Tableau 4 : Modélisation M4-5nW de la structure GB3/GB3

Matériau	Epaisseur (m)	Module d'Young (MPa)	Coefficient de Poisson
BBSG3	0,08	7000	0,35
GB3	0,26	9000	0,35
Plate-forme	sans objet	Ressort de Winkler de « raideur » K à déterminer (MPa/m)	sans objet

Le domaine M4-5nW maillé (Figure 4) est un carré de 10m de côté ( $-5 \leq x \leq 5$ ,  $-5 \leq y \leq 5$ ), auquel on impose les conditions limites mentionnées précédemment, revenant à bloquer les déplacements normaux aux bords du maillage et à imposer des contraintes tangentielles nulles.

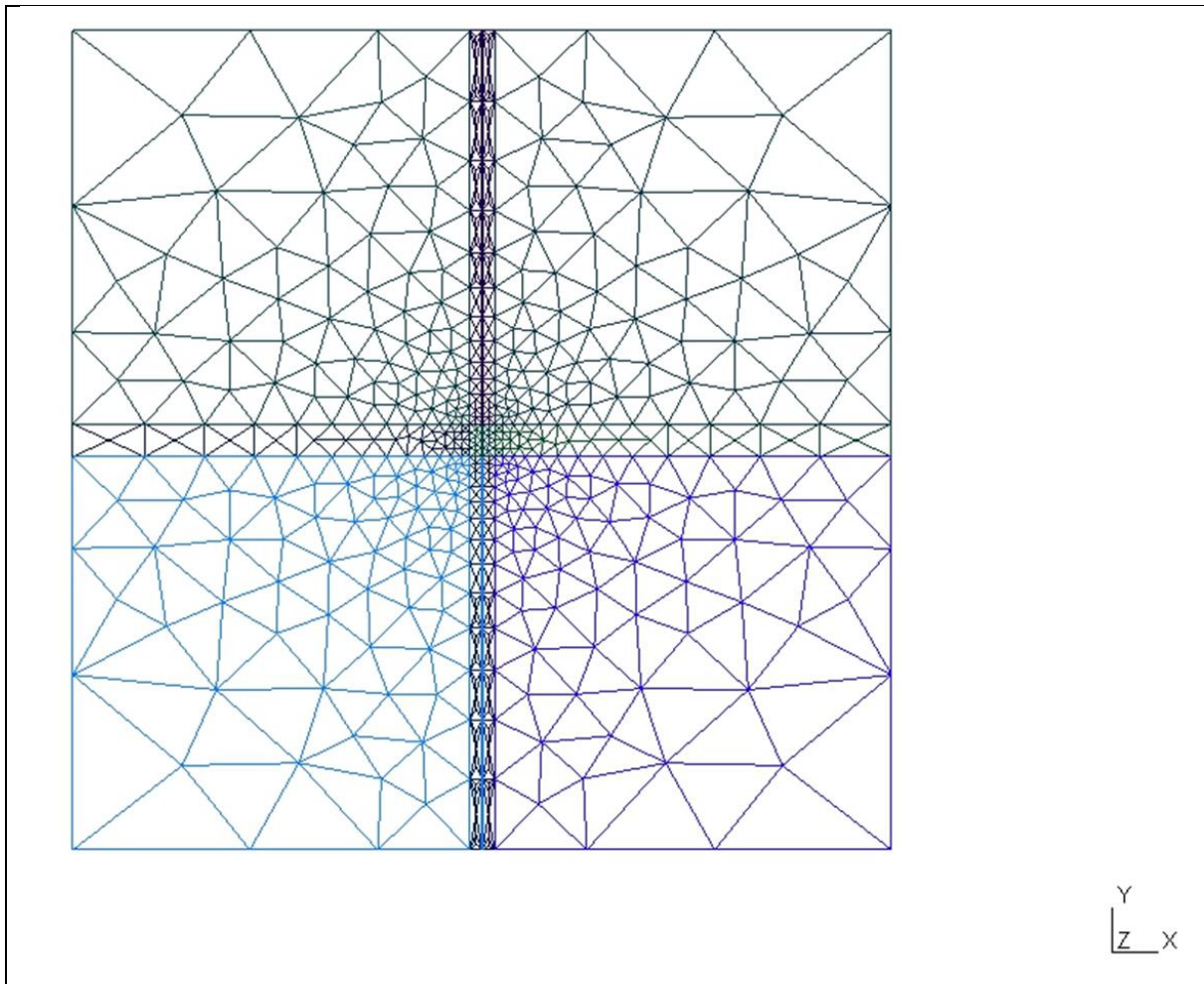


Figure 4 : Maillage M4-5nW 2D utilisé pour les calculs FreeFem++ de cet exemple. L'origine du repère  $(0, x, y)$  est située au centre du maillage. Le domaine maillé a pour limites  $-5m \leq x \leq 5m$ ,  $-5m \leq y \leq 5m$ . Le maillage est constitué à partir des éléments triangulaires P1-P1b de FreeFem++, qui mixent « interpolations linéaires » (P1) et « interpolations par fonctions bulles » (P1b). Le maillage prend explicitement en compte les contours du segment  $(-2.5m \leq x \leq 2.5m, -1m \leq y \leq 1m)$  utilisé plus loin pour modéliser la présence d'une fissure inscrite dans le plan vertical  $x = 0$ . Il comporte également 2 lignes internes d'équation  $x = \pm 0,2m$  pour tenir compte ultérieurement d'une surface de décollement à l'intérieur de cette bande.

Le modèle considéré ici ne comporte que 2 couches M4-5nW, correspondant aux matériaux bitumineux (on verra que celles-ci passent au nombre de 3 dans le cas fissuré). Un modèle de référence M4-5nW plus fin, c.-à-d. plus proche de la structure « Alizé » serait possible par l'ajout d'une troisième couche M4-5nW, représentative de la couche de GNT sur une certaine épaisseur (elle-même appuyée ou non sur ressorts de Winkler). Cette couche additionnelle permettrait de rendre compte plus fidèlement de la diffusion de contrainte au sein de la GNT que le seul emploi de ressorts de Winkler. La taille des tableaux numériques déclarés en standard dans le noyau du logiciel FreeFem++ nous a toutefois empêchés de tester cette option<sup>22</sup>.

<sup>22</sup> Il est toutefois possible de demander d'apporter des modifications au noyau de FreeFem++ en s'adressant à l'équipe de développement et maintenance du logiciel.



Le chargement de jumelage standard est appliqué au travers des fonctions indicatrices des aires à pression uniforme, indépendamment du maillage (*i.e* sans introduction explicite du contour des disques chargés)<sup>23</sup>.

### Calage de la rigidité des ressorts de Winkler

La comparaison entre calculs Alizé et M4-5nW peut être utilisée dans un premier temps pour caler la raideur  $K$  des ressorts de Winkler. En effectuant celui-ci sur la valeur de déflexion obtenue au niveau de l'entre-jumelage (de l'ordre de 40/100 mm) positionné au centre du maillage, les calculs conduisent à retenir la valeur :

$$K = 11 \text{ MPa/m}$$

La Figure 5 montre dans ces conditions les bassins de déflexion obtenus le long de l'axe  $x$  pour les 2 modèles. Les écarts de formes observés ici résultent non pas des différences d'approches théoriques entre modèle de Burmister et modèle M4-5nW, mais des différences de modélisation des structures qui prennent en compte la couche de GNT et une couche de sol infini dans le cas du modèle de Burmister et uniquement un sol de Winkler dans le cas M4-5nW.

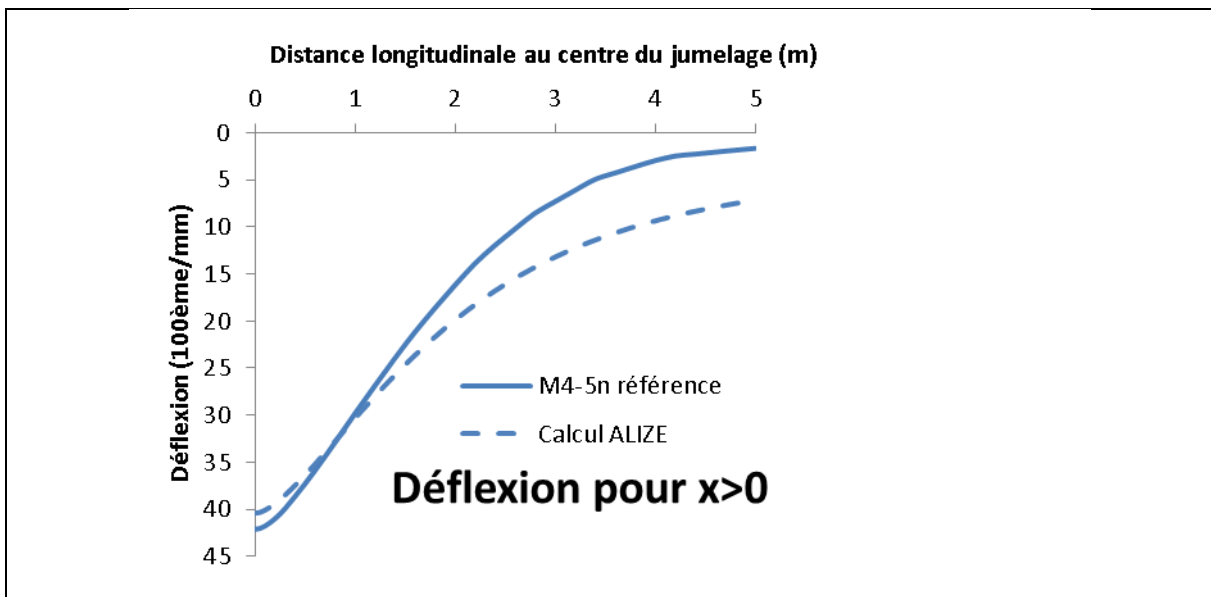


Figure 5 : Calculs de référence sur structure GB3/GB3 Courbes de déflexion Alizé et M4-5nW le long de l'axe  $x$  (par symétrie, seul le côté  $x \geq 0$  est représenté)

### Résultats en déformations et contraintes

Les Figure 6 et Figure 7 montrent à titre d'exemple les carte d'isovaleurs des déformation et contrainte  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\sigma_{xx}$  calculées dans ces conditions en face inférieure des couches bitumineuses (interface GB3/GNT).

<sup>23</sup> Il convient toutefois d'introduire dans le script de calcul une formule de correction des pressions associées aux indicatrices de façon à respecter sur chacune des aires chargées la résultante exacte des charges appliquées ( $0,0325/2=0,01625$  MN par roue)

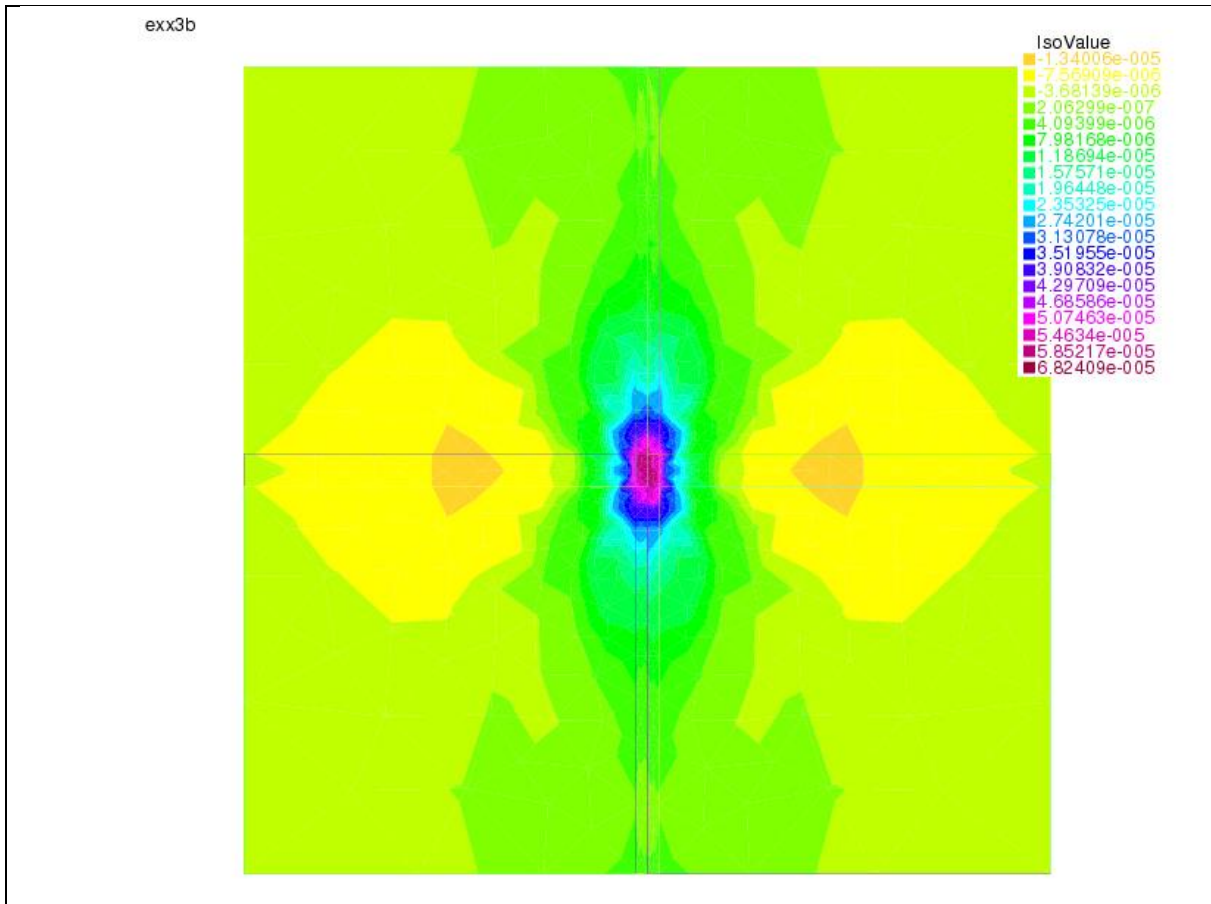


Figure 6 : Isovaleurs de déformation  $\varepsilon_{xx}$  calculées en base des couches bitumineuses (interface GB3/GNT). Echelle de déformation sans unité.

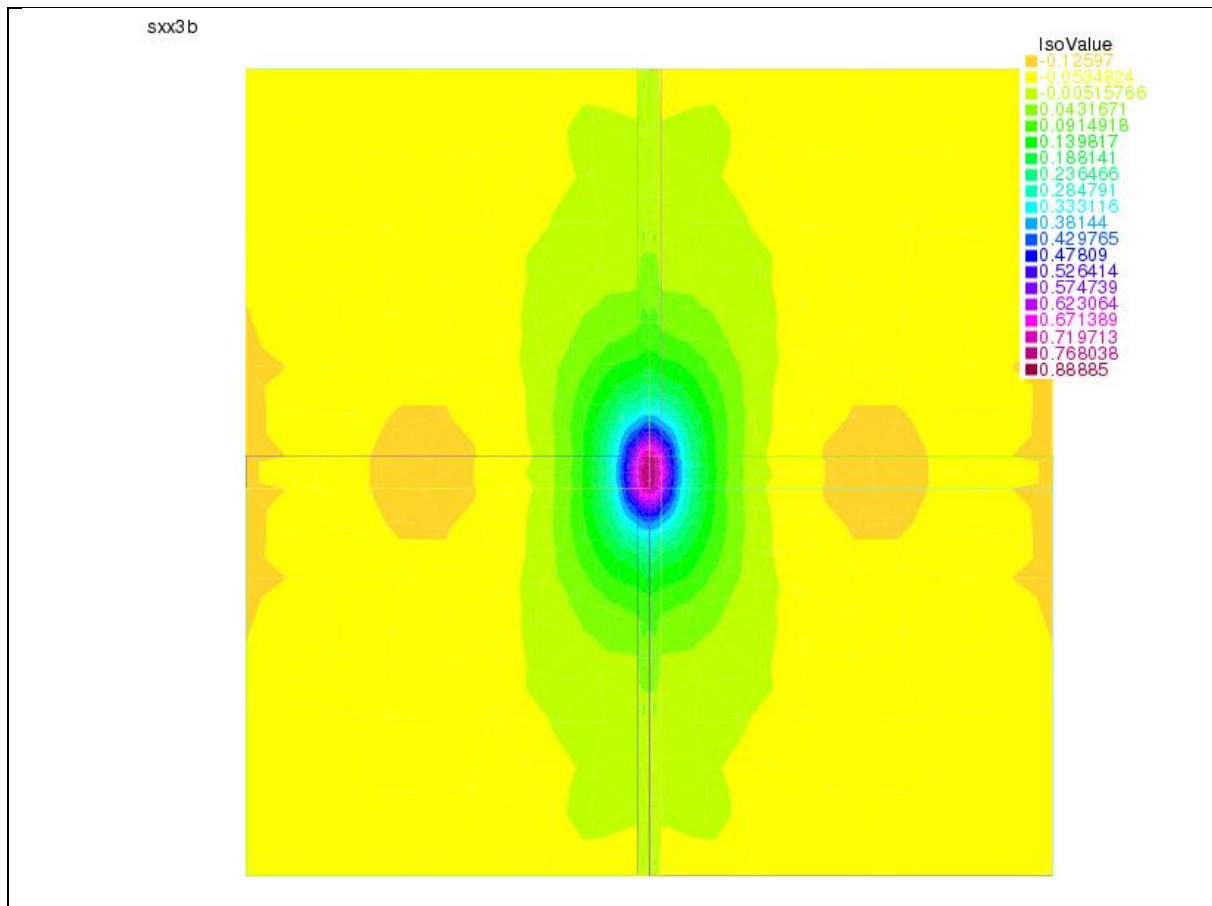


Figure 7 : Isovaleurs de contrainte  $\sigma_{xx}$  calculées en base des couches bitumineuses (interface GB3/GNT). Echelle de contrainte en MPa.

Le Tableau 5 : Déformations et contraintes 3D extraites du calcul de référence M4-5nW donne les valeurs de contrainte et déformation 3D issues du calcul M4-5nW aux mêmes points que ceux du Tableau 3. Les valeurs M4-5nW et Alizé sont relativement voisines, mais présentent toutefois des écarts relevant des mêmes raisons que celles évoquées précédemment.

Dans les calculs suivant, nous ne nous intéressons qu'au modèle M4-5nW en examinant en particulier les effets relatifs produits sur les déformations et contraintes par une fissure ou un décollement.

Tableau 5 : Déformations et contraintes 3D extraites du calcul de référence M4-5nW

Déflexion sous entre-jumelage	V (surface chaussée)	
	42/100 mm	(40/100 mm)
Interface BBSG3/GB3 sous axe jumelage (z=0,08m)	$\varepsilon_{xx}$ ( $\mu\text{def}$ ) -33 (-19)	$\sigma_{xx}$ (BBSG3) (MPa) -0,35 (-0,30)
Interface GB3/GB3 sous axe jumelage (z=0,21m)	14 (16)	$\sigma_{xx}$ (GB3) 0,17 (0,15)
Interface GB3/GNT sous axe jumelage (z=0,34m)	64 (58)	$\sigma_{xx}$ (GB3) 0,83 (0,75)

(en bleu, rappel des valeurs Alizé obtenues avec interface BBSG/GB collée – cf. Tableau 3)

## 4.2 Calcul avec fissure verticale (modèle F)

On considère ici la présence d'une fissure située dans le plan vertical  $x = 0$ , toutes autres données de la structure M4-5nW restant égales par ailleurs. En l'absence de modélisation de propagation de fissure à ce stade d'avancement de notre projet DVDC, on lui donne ici la forme arbitraire d'un « chapeau de gendarme » représenté sur la Figure 8.

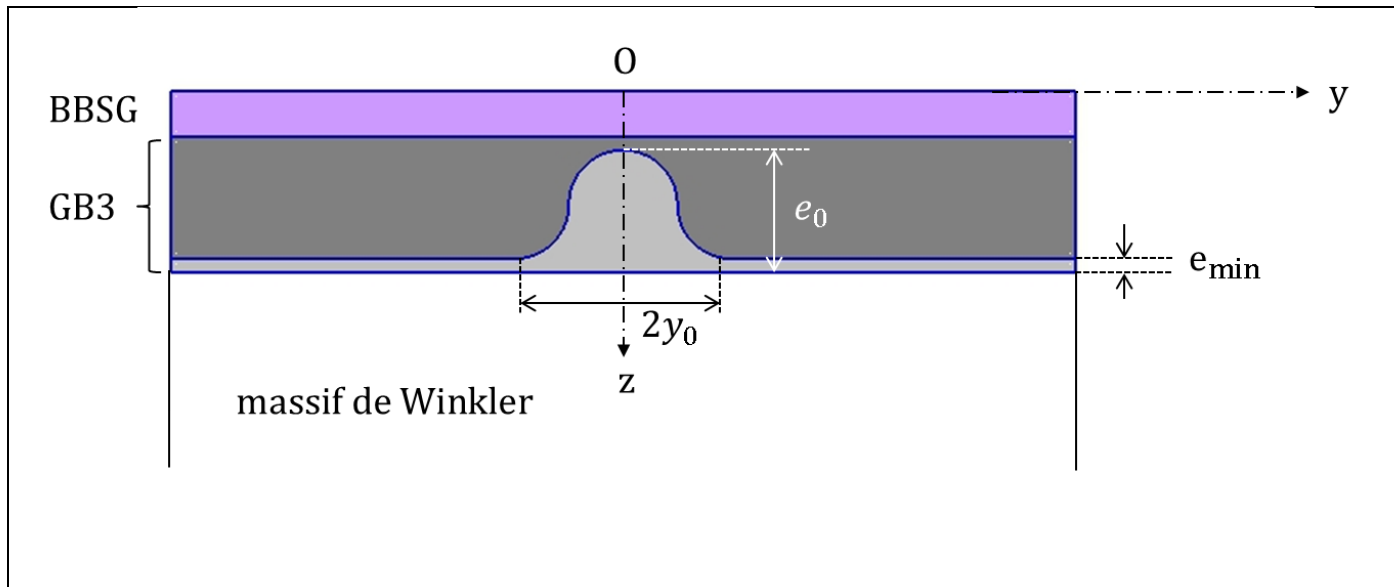


Figure 8 (figure de principe) : Modèle M4-5nW avec fissure dans le plan  $x = 0$  caractérisée par le front décrit par les équations :

$$e(y) = e^0 + 3(e_{min} - e^0) \left(\frac{y}{y^0}\right)^2 - 2(e_{min} - e^0) \left(\frac{|y|}{y^0}\right)^3 \text{ pour } |y| \leq y^0 \quad (43)$$

$$e(y) = e_{min} \text{ pour } |y| \geq y^0 \quad (44)$$

(de bas en haut : couche M4-5nW n°1 de BBSG (violet), couche M4-5nW n°2 de GB3 (gris foncé), couche M4-5nW n°3 de GB3 (gris clair),

fissure = ensemble de la zone en gris clair du plan  $(0, y, z)$  comprise entre  $y = -y^0$  et  $y = y^0$

Les paramètres  $e^0$ ,  $e_{min}$ ,  $y^0$  sont respectivement pris égaux à  $0,12m$ ,  $0,01m$  et  $1m$ . En particulier, le sommet de fissure se situe à la cote  $z = 0,22m$ .

La Figure 9 montre la géométrie 3D d'ensemble considérée pour la modélisation M4-5nW de la structure fissurée. Par commodité de calcul, la géométrie des couches 2 et 3 imposée au niveau du plan vertical  $x = 0$ , est prolongée en tout  $x$  conférant à l'interface GB3/GB3 du M4-5nW (interface non physique, introduit à des fins de modélisation) la forme d'un cylindre de génératrice d'axe  $x$ .

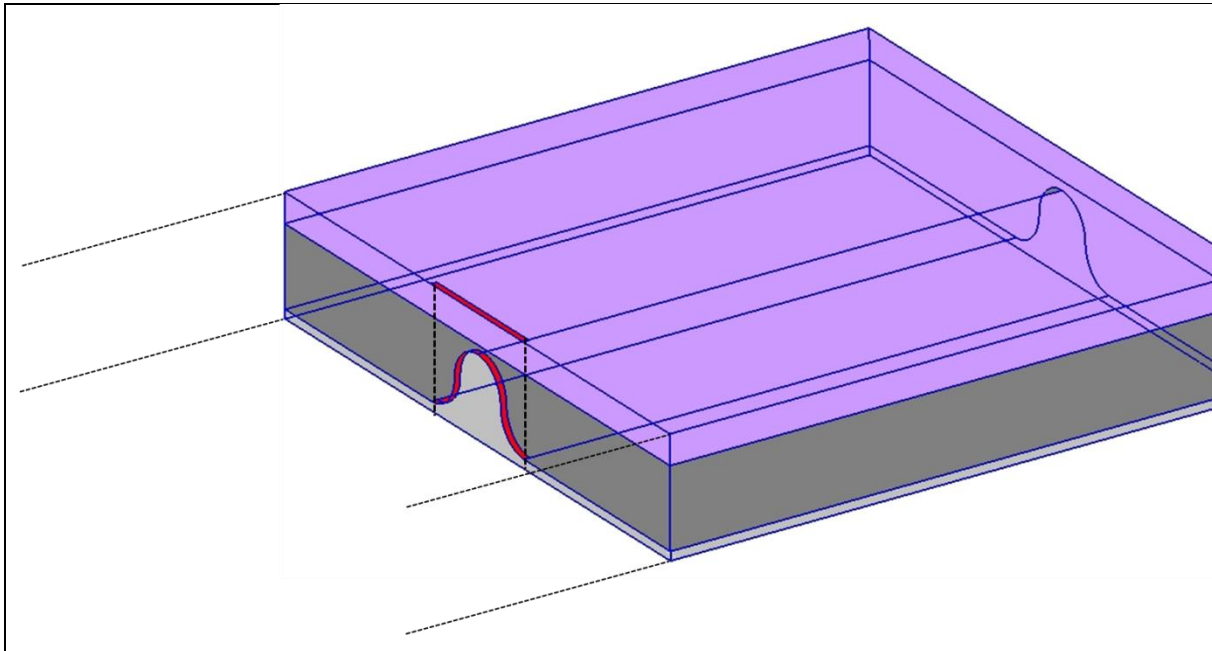


Figure 9 (figure de principe) : Géométrie 3D considérée à travers le modèle M4-5nW (ici représentation du 1/2 domaine  $x \geq 0$  uniquement ; rapports d'échelle suivant  $x, y, z$  non respectés pour plus de lisibilité). Les 2 couches physiques de GB3 d'épaisseurs constantes et parfaitement collées entre elles sont remplacées par deux couches M4-5nW, d'épaisseurs variables en  $y$ , prolongeant la géométrie du front de fissure en tout  $x$ . Leur épaisseur globale est imposée égale à celle des 2 couches physiques (0,26m).

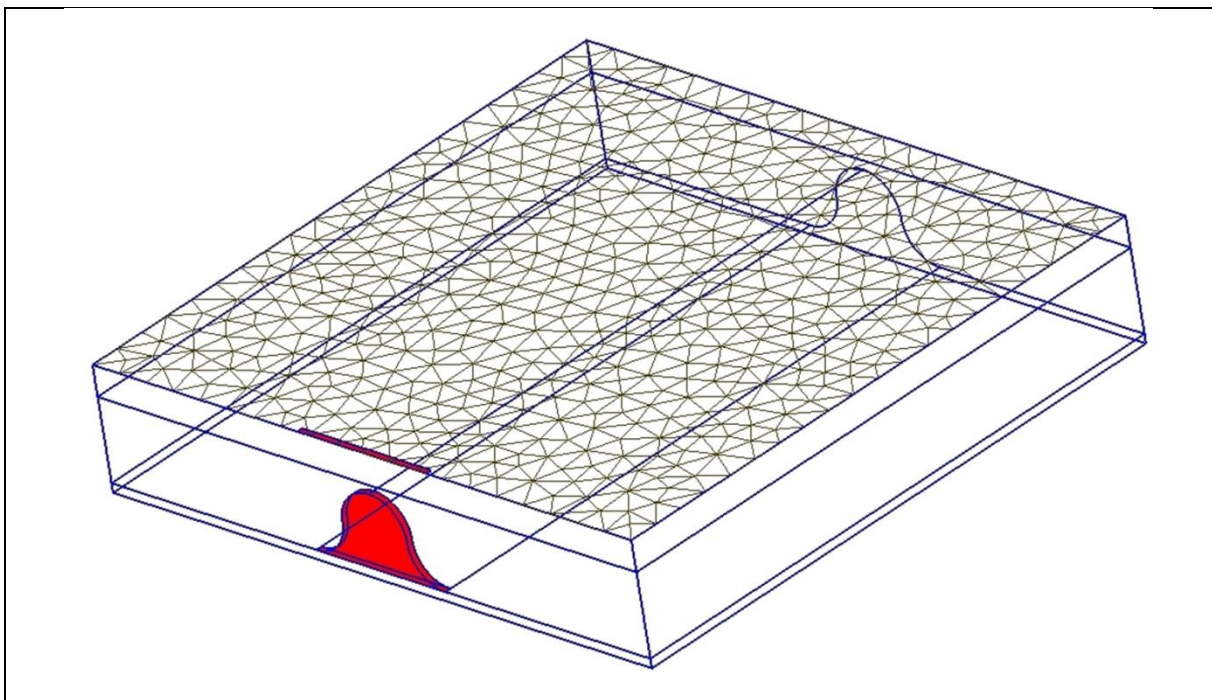


Figure 10 (figure de principe) : Maillage M4-5nW 2D associé à la structure fissurée (seul le 1/2 domaine  $x \geq 0$  est ici représenté ; les échelles  $x, y, z$  sont déformées pour plus de lisibilité). La fissure se traduit

au niveau du maillage par la seule introduction du domaine rectangulaire de faible épaisseur, figuré en rouge, correspondant à la trace de la fissure 3D dans le plan  $(O,x,y)$ . Dans le maillage de la Figure 4, ce domaine est introduit sous la forme du quadrilatère :  $-2.5 \text{ mm} \leq x \leq 2.5 \text{ mm}$ ,  $-1 \text{ m} \leq y \leq 1 \text{ m}$ . Son module est fixé à la valeur :  $E_{oedo} = 10^{-5} E_{GB3}$

Le Tableau 6 présente un extrait des résultats obtenus sous l'entre-jumelage. La déflexion est à ce stade encore faiblement impactée par la fissure. Par comparaison avec le Tableau 5, on observe par contre une forte augmentation des déformation et contrainte  $\varepsilon_{xx}, \sigma_{xx}$  à la cote =  $0,21 \text{ m}$ , qui se situe ici à 1 cm seulement du sommet de la fissure.

Tableau 6: Résultats extraits du calcul M4-5nW avec fissure

Déflexion sous entre-jumelage	V (surface chaussée) 42/100 mm	
	Interface BBSG3/GB3 sous axe jumelage (z=0,08m)	$\varepsilon_{xx}$ ( $\mu\text{def}$ ) -27
1 cm au-dessus du sommet du front de fissure sous axe jumelage (z=0,21m)	$\varepsilon_{xx}$ ( $\mu\text{def}$ ) 43	$\sigma_{xx}$ (GB3) 0,38

### 4.3 Calcul avec décollement partiel de l'interface BBSG/GB3 (modèle D)

Les calculs suivant illustrent la prise en compte dans les calculs M4-5nW d'un décollement, avec glissement parfait, situé au niveau de l'interface physique des deux couches d'enrobés BBSG3/GB3 ( $z = 0,08 \text{ m}$ ). La zone décollée est supposée limitée à une bande centrale d'axe  $x$  et de largeur 40cm ( $-0,2 \text{ m} \leq y \leq 0,2 \text{ m}$ ) (décollement partiel dans le sens transversal).

Le Tableau 7 montre des extraits des résultats obtenus à l'aplomb de l'entre-jumelage. On peut notamment observer la discontinuité de déformation  $\varepsilon_{xx}$  de part et d'autre de la bande décollée.

Le Tableau 8 fournit à titre de comparaison les résultats obtenus avec le logiciel Alizé pour les deux hypothèses d'interface glissante (valeurs indiquées en noir) et d'interface collée (valeurs en bleu). Comme attendu, on peut observer que le changement d'hypothèse joue qualitativement de la même façon pour les calculs M4 – 5nW et pour les calculs Alizé. Ainsi, les deux logiciels rendent compte pour toute grandeur (déflexion, déformation, contrainte) d'une même tendance à la baisse ou à la hausse de son intensité, en fonction de l'hypothèse de fonctionnement retenue pour l'interface BBSG/GB3. Par contre, les variations relatives sont bien plus importantes dans le cas des calculs Alizé que dans le cas des calculs M4-5nW. Ceci provient de la différence entre les aires considérées décollées, qui concerne tout l'interface BBSG/GB3 en pour Alizé et seulement la bande longitudinale médiane de largeur 40cm pour la modélisation M4-5nW.

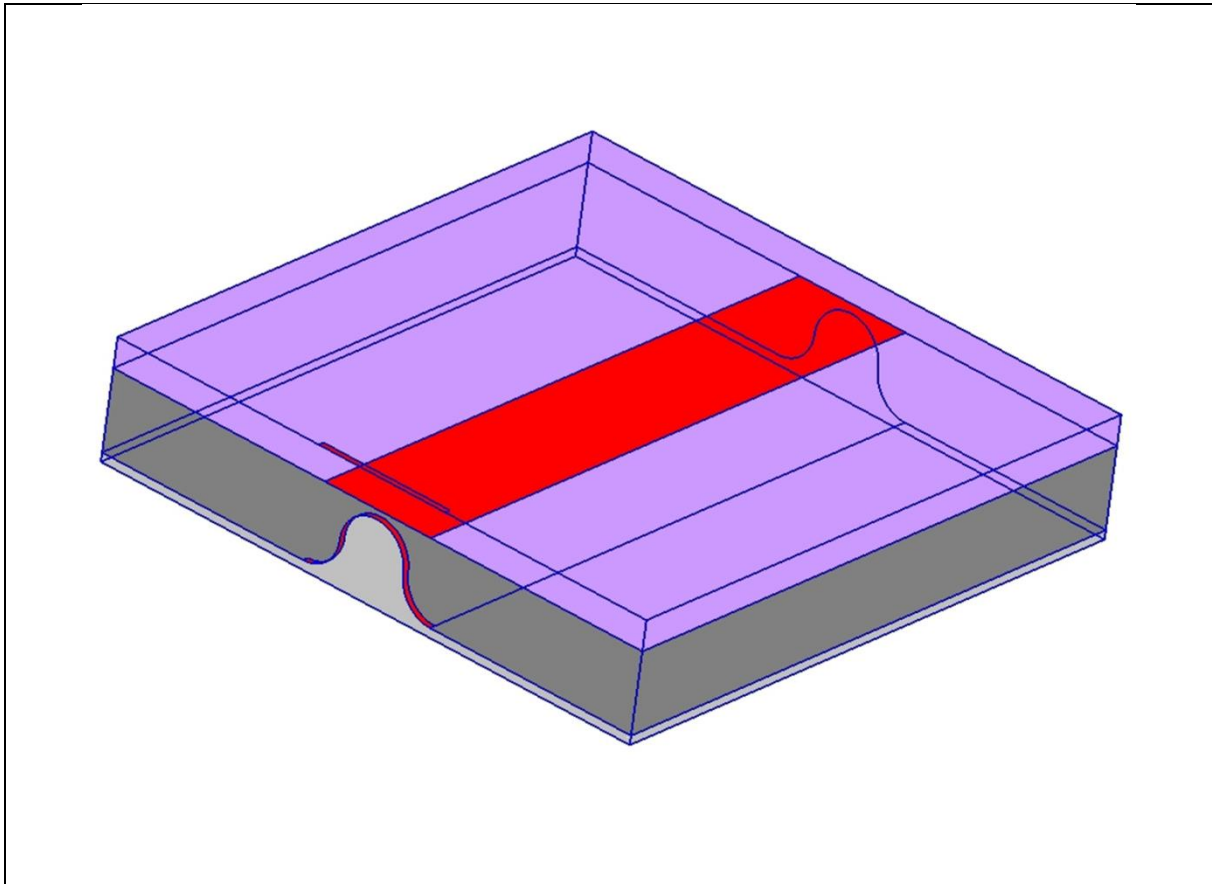


Figure 11 (figure de principe) : Maillage M4-5nW 2D associé à la prise en compte d'une surface de décollement (combinée ici à la présence éventuelle d'une fissure verticale). Seul le 1/2 domaine  $x \geq 0$  est représenté ; les échelles  $x,y,z$  sont déformées pour plus de lisibilité. La présence d'une surface de décollement se traduit au niveau du maillage par l'introduction d'un sous-domaine maillé de même géométrie permettant d'annuler les contraintes de cisaillement sur l'interface M4-5nW concerné. Sur le maillage de la Figure 4, ceci revient à introduire les 2 lignes internes d'équation :  $x = \pm 0,2m$ .

Tableau 7 : Résultats extraits du calcul M4-5nW avec décollement sur bande médiane de largeur 40cm

Déflexion sous entre- jumelage	V (surface chaussée)	
	43/100 mm	(42/100 mm)
De part et d'autre de l'interface BBSG3/GB3 sous axe jumelage (z=0,08m)	$\varepsilon_{xx}$ (BBSG) ( $\mu\text{def}$ ) 13 (-33)	$\sigma_{xx}$ (BBSG) (MPa) -0,03 (-0,35)
	$\varepsilon_{xx}$ (GB3) -62 (-33)	
Interface GB3/GB3 sous axe jumelage (z=0,21m)	$\varepsilon_{xx}$ (GB3) 8 (14)	$\sigma_{xx}$ (GB3) 0,12 (0,17)
Interface GB3/GNT sous axe jumelage (z=0,34m)	$\varepsilon_{xx}$ (GB3/GNT) 68 (64)	$\sigma_{xx}$ (GB3) 0,88 (0,83)

(en bleu, rappel des valeurs M4-5nW obtenues avec interface BBSG/GB collée – cf. Tableau 4)

Tableau 8 : Comparaisons Alizé entre interface BBSG/GB complètement décollée et interface collée

Déflexion sous entre- jumelage	V (surface chaussée)	
	50/100mm	(40/100 mm)
De part et d'autre de l'interface BBSG3/GB3 sous axe jumelage (z=0,08m)	$\varepsilon_{xx}$ (BBSG) ( $\mu\text{def}$ ) 63 (-19)	Cont. $\sigma_{xx}$ (BBSG3) (MPa) 0.37 (-0,30)
	$\varepsilon_{xx}$ (GB3) -79 (-19)	
Interface GB3/GB3 sous axe jumelage (z=0,21m)	8 (16)	$\sigma_{xx}$ (GB3) 0.01 (0,15)
Interface GB3/GNT sous axe jumelage (z=0,34m)	83 (58)	$\sigma_{xx}$ (GB3) 1.04 (0,75)

(valeurs en bleu, reprises du Tableau 3)

#### 4.4 Calcul avec fissure et décollement d'interface BBSG/GB3

Ce dernier exemple illustre la prise en compte concomitante par M4-5nW d'une fissure et d'une surface de décollement. Le calcul reprend les 2 géométries de défaut des sections 4.2 et 4.3, activées au cours du même calcul. Sur le Tableau 9, on observe à la fois les augmentations de déformation et contrainte  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\sigma_{xx}$  provoquées par la fissure ( $z = 0,21\text{m}$ ) et la discontinuité de déformation  $\varepsilon_{xx}$  de part et d'autre de la surface de décollement ( $z = 0,08\text{m}$ ).

Tableau 9: Résultats extraits du calcul M4-5nW avec fissure et décollement

Déflexion sous entre- jumelage	V (surface chaussée)	
	43/100 mm	
De part et d'autre de l'interface BBSG3/GB3 sous axe jumelage (z=0,08m)	$\varepsilon_{xx}$ (BBSG) ( $\mu\text{def}$ ) 25	$\sigma_{xx}$ (BBSG) (MPa) 0,04
	$\varepsilon_{xx}$ (GB3) -72	
1cm au-dessus sommet de fissure sous axe jumelage (z=0,21m)	$\varepsilon_{xx}$ (GB3) 39	$\sigma_{xx}$ (GB3) 0,36
Interface GB3/GNT sous axe jumelage (z=0,34m)	Sans objet (fissure)	$\sigma_{xx}$ (GB3) 0

Fin de la contribution relative à la tranche 1 du PN DVDC



## Contribution relative à la tranche 2 du PN DVDC

### 5. Calcul du taux de restitution d'énergie élastique en théorie M4-5n

Nous souhaitons établir dans la suite de ce document une loi de propagation de fissure en fatigue pour modèle M4-5n, qui puisse jouer le même rôle que la loi de Paris en Mécanique linéaire de la Rupture usuelle, employée en MMC 2D ou 3D<sup>24</sup>. Pour rappel, la loi de Paris relie la vitesse d'avancement d'un front de fissure, sous sollicitations répétées, aux facteurs d'intensité de contrainte le long de cette fissure, sous la forme :

$$\frac{da_{fis}}{dN}(P) = A K_{max}(P, N)^\alpha \quad (45)$$

avec :

$P$  = point courant situé sur le front de fissure

$\frac{da_{fis}}{dN}(P)$  = vitesse d'avancement du front de fissure au point  $P$ , en fonction du nombre de cycles de chargement

$K_{max}(P, N)$  = valeur positive maximale du facteur d'intensité de contrainte atteint (en mode I, II, III ou en mode mixte) sous le chargement n° $N$  au point  $P$ <sup>25</sup>

$A, \alpha$  = paramètres « matériaux » de la loi de Paris, l'exposant  $\alpha$  étant généralement supérieur à 1.

Cependant, la notion de facteur d'intensité de contrainte n'a pas de véritable analogue en théorie M4-5n, susceptible de se substituer aux coefficients  $K_{max}(P, N)$  de l'équation (45). Pour contourner la difficulté, une possibilité est de revenir comme nous allons le faire, à la notion plus universelle issue des principes de la Thermodynamique, de « taux de restitution d'énergie élastique »  $G$ , à laquelle sont reliés plus ou moins directement les facteurs d'intensité de contrainte de la MMC (Tableau 10). On peut ainsi s'attendre à ce que le calcul de  $G$  en théorie M4-5n, suggère l'expression de quantités physiques, à commencer par la valeur de  $G$  elle-même, susceptibles de jouer un rôle moteur de la propagation de fissures en modélisation M4-5n ; ceci, que ce soit sous chargement monotone ou sous charges répétées.

Pour simplifier l'exposé et les calculs, nous nous plaçons par la suite dans le cadre restrictif des hypothèses de modélisation considérées en 3.1 et 3.2, sachant que de nombreux cas plus généraux pourraient être envisagés sans grande difficulté supplémentaire.

On examine ainsi successivement deux cas :

- celui d'une structure M4-5n avec fissuration verticale de couche, dans le plan transversal  $(O, y, z)$ .<sup>26</sup>

<sup>24</sup> MMC = Mécanique des Milieux Continus basée sur la définition classique des champs de déplacement, déformation et contrainte (avec hypothèse ici de petites déformations)

<sup>25</sup> Un cycle de chargement désigne une sollicitation variable dans le temps, de relativement courte durée, telle que le passage d'un véhicule sur une section de chaussée donnée. La valeur  $K_{max}(P)$  est alors la valeur maximale du facteur d'intensité de contrainte, atteinte en  $P$ , au cours de la sollicitation.

<sup>26</sup> De façon plus générale, la trace d'une fissure verticale sur le plan horizontal  $\omega$  pourrait être définie par des fonctions  $x(y)$  ou  $y(x)$ . On est ici dans le cas où  $x(y) = 0$  pour tout  $y$ .

- celui d'une structure avec fissure de délaminage à l'interface entre deux couches.

Tableau 10 : Définition du taux de restitution d'énergie et réécriture de la loi de Paris en MMC 2D

Rappel : dans une structure fissurée,  $G$  est définie à partir de la quantité d'énergie élastique  $W_{elas}$  stockée sous chargement donné.  $G$  est égale à la variation d'énergie  $\delta W_{elas}$ , induite à efforts constants par une augmentation élémentaire de surface de fissure  $\delta A$ , soit :

$$G = \left( \frac{\partial W_{elas}}{\partial A} \right)_F \quad (46)$$

En MMC et en hypothèse de déformations ou contraintes planes, on a en mode I par exemple, les relations explicites entre  $K_I$  et  $G$  pour  $G > 0$  :

$$K_I = \sqrt{E G} \text{ (contraintes planes) ou } K_I = \sqrt{E G / (1 - \nu^2)} \text{ (déformations planes)} \quad (47)$$

où  $E$  et  $\nu$  sont les module d'Young et coefficient de Poisson du matériau parcouru par le front de fissure.

Il est ainsi possible dans ce cas de réécrire directement la loi de Paris en fonction de  $G$  sous la forme :

$$\frac{da_{fis}}{dN}(P) = B G_{max}(P, N)^\beta \quad (48)$$

avec :  $\beta = \alpha/2$ .

## 5.1. Loi de fatigue pour structure M4-5n avec fissuration de couche

### 5.1.1. Calcul du taux de restitution d'énergie $G$ dans le cas d'une fissure verticale

Reprenons les hypothèses géométriques de la section 3.1.1. Pour les calculs analytiques, on suppose l'épaisseur  $\Delta x = \varepsilon$  de la coupure  $\Omega_{fis}^\varepsilon$  réduite à 0.

On considère le cas d'une fissure partant du bas de la couche n° $i$  du M4-5n. La modélisation de la fissure s'appuie sur les deux couches  $i$  et  $i - 1$ , considérées constituées du même matériau. Les interfaces inférieure  $(i, i + 1)$  et supérieure  $(i - 2, i - 1)$  ont des cotes fixes  $z^{(i, i+1)}$  et  $z^{(i-2, i-1)}$  (cf. Figure 3). L'aire fissurée dans le plan  $(O, y, z)$  (ou  $x = 0$ ) est comprise entre l'interface  $(i, i + 1)$  et la cote notée,  $z_{haut}(y)$ . Comme dans l'exemple (F) de la section 4.2, on se sert de la fonction  $z_{haut}(y)$  pour étendre en tout point  $(x, y)$  de  $\omega$  la géométrie de l'interface  $(i - 1, i)$  à un cylindre, de génératrices parallèles à l'axe  $x$  s'appuyant sur la courbe  $z^{(i-1, i)} = z_{haut}(y)$  (cf. Figure 9). Les couches  $i$  et  $i - 1$  sont donc d'épaisseurs respectives  $e^{(i)}(y) = z^{(i, i+1)} - z_{haut}(y)$  et  $e^{(i-1)}(y) = z_{haut}(y) - z^{(i-2, i-1)}$  avec une épaisseur totale constante,  $e^{(i)}(y) + e^{(i-1)}(y) = z^{(i, i+1)} - z^{(i-2, i-1)}$ .

On note  $E, \nu$  (sans exposant) les module d'Young et coefficient de Poisson, communs aux 2 couches M4-5n,  $i - 1, i$ .

L'énergie élastique emmagasinée dans la structure M4-5n, à efforts extérieurs et hauteur de fissure fixées, est donnée par l'intégrale :

$$W_{elasW} = \int_{\omega} w_{elasW}(\Sigma(e^{(i)}), e^{(i-1)}, e^{(i)}) d\omega \quad (49)$$

où pour rappel,  $w_{elasW}$  est la densité d'énergie élastique du M4-5nW égale à la somme des densités d'énergie élastique des couches et des ressorts de Winkler :

$$w_{elasW} = \sum_{i=1}^n (w_c^{(i)} + w_v^{(i)} + w_Q^{(i)}) + w_{Winkler}.$$

La notation  $\Sigma(e^{(i)})$  rend compte de la dépendance implicite du champ de contraintes généralisé  $\Sigma$ <sup>27</sup> du problème, vis-à-vis de l'épaisseur de couche  $e^{(i)}$ .

La notation  $w_{elasW}(\Sigma(e^{(i)}), e^{(i-1)}, e^{(i)})$  rend à la fois compte de la dépendance implicite de la densité d'énergie élastique vis-à-vis de  $e^{(i)}$  via  $\Sigma$  et de sa dépendance explicite aux épaisseurs  $e^{(i-1)}, e^{(i)}$  à travers les densités  $w_c, w_v, w_Q$  des couches  $i - 1$  et  $i$ .

Considérons alors une propagation « élémentaire » du front de fissure vers le haut  $\delta z_{haut}(y)$ , décrite par la variation de hauteur  $\delta a_{fis}(y)$ , fonction de  $y$  dans le cas général. En convenant d'un signe positif pour  $\delta a_{fis}(y)$ , on a :

$$\delta z_{haut}(y) = \delta e^{(i-1)}(y) = -\delta a_{fis}(y) \leq 0 \quad \text{et} \quad \delta e^{(i)}(y) = \delta a_{fis}(y) \geq 0 \quad (50)$$

Evaluons le taux de restitution d'énergie  $G$  associé à la variation de géométrie de fissure  $\delta a_{fis}(y)$ .

L'augmentation de l'aire fissurée  $A$  est donnée par l'intégrale sur la largeur de chaussée :

$$\delta A = \int_{largeur} \delta a_{fis}(y) dy \quad (51)$$

La variation d'énergie élastique s'obtient quant à elle par différentiation de  $W_{elasW}$  par rapport aux variations d'épaisseurs  $\delta e^{(i-1)}, \delta e^{(i)}$ , soit :

$$\begin{aligned} \delta W_{elasW} &= \int_{\omega} (w_{elasW,\Sigma} \delta \Sigma + w_{elas,e^{(i-1)}} \delta e^{(i-1)} + w_{elas,e^{(i)}} \delta e^{(i)}) d\omega \\ &= \int_{\omega} (w_{elasW,\Sigma} \delta \Sigma + (w_{elas,e^{(i)}} - w_{elas,e^{(i-1)}}) \delta a_{fis}) d\omega \end{aligned} \quad (52)$$

Compte tenu des lois de comportement  $\mathcal{E} = w_{elasW,\Sigma}$  où, pour rappel,  $\mathcal{E}$  désigne l'ensemble des champs de déformation généralisés de la structure M4-5nW, on a encore :

$$\delta W_{elasW} = \int_{\omega} \mathcal{E} \delta \Sigma d\omega + \int_{\omega} (w_{elas,e^{(i)}} - w_{elas,e^{(i-1)}}) \delta a_{fis} d\omega \quad (53)$$

<sup>27</sup> A distinguer du symbole de sommation

Or, la première de ces intégrales représente le travail des efforts internes  $\delta\Sigma$  dans le champ de déformation  $\varepsilon$ . Son expression peut être transformée en utilisant le Principe des Travaux Virtuels (PTV) de la théorie M4-5n énoncé en annexe A4, qui exprime l'égalité entre le travail des efforts internes et le travail des efforts extérieurs. On obtient ainsi :

$$\delta W_{elasW} = \frac{1}{2} \int_{\omega} \left( \Phi_{\alpha}^{(i)} \left( \tau_{\alpha}^{(i,i+1)} + \tau_{\alpha}^{(i-1,i)} \right) - \Phi_{\alpha}^{(i-1)} \left( \tau_{\alpha}^{(i-2,i-1)} + \tau_{\alpha}^{(i-1,i)} \right) \right) \delta a_{fis} d\omega + \int_{\omega} (w_{elas,e^{(i)}} - w_{elas,e^{(i-1)}}) \delta a_{fis} d\omega$$

A partir des expressions explicites des densités d'énergie élastique  $w_c^{(i)}$ ,  $w_Q^{(i)}$ ,  $w_v^{(i)}$  et de leurs dérivées par rapport à  $e^{(i-1)}$ ,  $e^{(i)}$ , on aboutit alors à l'expression :

$$\delta W_{elasW} = \int_{\omega} g \delta a_{fis} d\omega \quad (54)$$

où  $g(x, y)$  est la fonction retranscrite dans le Tableau 11.

Tableau 11 : Expression de  $g(x, y)$  pour modèle M4-5n, avec couches  $i - 1, i$  fissurées verticalement ( $E, \nu$  : module d'Young, coefficient de Poisson de ces couches)

Nota : la dépendance des champs en  $(x, y)$  est omise par simplification d'écriture. On omet aussi la dépendance de toutes ces quantités par rapport au positionnement de la charge le long de sa trajectoire.

$$g(x, y) = \frac{1}{2E} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{e^{(i-1)^2}} \left( N_{xx}^{(i-1)^2} - 2\nu N_{xx}^{(i-1)} N_{yy}^{(i-1)} + N_{yy}^{(i-1)^2} + 2(1+\nu) N_{xy}^{(i-1)^2} \right) \\ & + \frac{36}{e^{(i-1)^4}} \left( M_{xx}^{(i-1)^2} - 2\nu M_{xx}^{(i-1)} M_{yy}^{(i-1)} + M_{yy}^{(i-1)^2} + 2(1+\nu) M_{xy}^{(i-1)^2} \right) \\ & + \frac{12(1+\nu)}{5 e^{(i-1)^2}} \left( Q_x^{(i-1)^2} + Q_y^{(i-1)^2} \right) \\ & - \frac{2(1+\nu)}{15} \left( \tau_x^{(i-2,i-1)^2} - \tau_x^{(i-2,i-1)} \tau_x^{(i-1,i)} + \tau_y^{(i-2,i-1)^2} - \tau_y^{(i-2,i-1)} \tau_y^{(i-1,i)} \right) \\ & - \left( \frac{13}{35} \nu^{(i-2,i-1)^2} + \frac{9}{35} \nu^{(i-2,i-1)} \nu^{(i-1,i)} \right) \\ & - \frac{1}{e^{(i)^2}} \left( N_{xx}^{(i)^2} - 2\nu N_{xx}^{(i)} N_{yy}^{(i)} + N_{yy}^{(i)^2} + 2(1+\nu) N_{xy}^{(i)^2} \right) \\ & - \frac{36}{e^{(i)^4}} \left( M_{xx}^{(i)^2} - 2\nu M_{xx}^{(i)} M_{yy}^{(i)} + M_{yy}^{(i)^2} + 2(1+\nu) M_{xy}^{(i)^2} \right) \\ & - \frac{12(1+\nu)}{5 e^{(i)^2}} \left( Q_x^{(i)^2} + Q_y^{(i)^2} \right) \\ & + \frac{2(1+\nu)}{15} \left( \tau_x^{(i,i+1)^2} - \tau_x^{(i-1,i)} \tau_x^{(i,i+1)} + \tau_y^{(i,i+1)^2} - \tau_y^{(i-1,i)} \tau_y^{(i,i+1)} \right) \\ & + \left( \frac{13}{35} \nu^{(i,i+1)^2} + \frac{9}{35} \nu^{(i-1,i)} \nu^{(i,i+1)} \right) \\ & - E \left( \Phi_x^{(i-1)} \left( \tau_x^{(i-2,i-1)} + \tau_x^{(i-1,i)} \right) + \Phi_y^{(i-1)} \left( \tau_y^{(i-2,i-1)} + \tau_y^{(i-1,i)} \right) \right) \end{aligned} \right.$$

$$+E \left( \Phi_x^{(i)} \left( \tau_x^{(i-1,i)} + \tau_x^{(i,i+1)} \right) + \Phi_y^{(i)} \left( \tau_y^{(i-1,i)} + \tau_y^{(i,i+1)} \right) \right) \}$$

Le tableau ci-après donne l'expression correspondante de  $g$  dans le cas de calculs M4-5n effectués en déformations planes et utilisés comme montré sur l'exemple plus loin, pour calibrer les modèles M4-5n vis-à-vis de calculs structurels MMC plus usuels.

Tableau 12: Expression de  $g(x)$  dans le cas de modèles M4-5n en déformations planes suivant l'axe  $y$ . Les couches  $i, i+1$  sont notées ici 1 et 2 ( $E, \nu$  : module d'Young, coefficient de Poisson de ces couches). Les grandeurs vectorielles ou tensorielles se réfèrent à l'indice  $x$ .

$$\begin{aligned} g(x) = & \tau_1(-\phi_1 + \phi_2) + \tau_2\phi_2 + \frac{(1-\nu^2)}{E} \left( \frac{N_1^2}{e_1^2} - \frac{N_2^2}{e_2^2} \right) + \frac{36}{E} (1-\nu^2) \left( \frac{M_1^2}{e_1^4} - \frac{M_2^2}{e_2^4} \right) \\ & + \frac{6}{5G} \left( \frac{Q_1^2}{e_1^2} - \frac{Q_2^2}{e_2^2} \right) - \frac{13}{35E} \nu_0^2 - \frac{9}{35E} \nu_0 \nu_1 + \frac{13}{35E} \nu_2^2 + \frac{9}{35E} \nu_2 \nu_1 \\ & + \frac{2(1+\nu)}{15E} \tau_2(\tau_2 - \tau_1) \end{aligned}$$

Finalement, de 51 et 54 on déduit la valeur suivante du taux de restitution d'énergie élastique :

$$G = \frac{\delta W_{elasW}}{\delta A} = \frac{\int_{\omega} g(x,y) dx \delta a_{fis}(y) dy}{\int_{largeur \omega} \delta a_{fis}(y) dy} \quad (55)$$

qui dépend de façon générale de l'évolution de la géométrie du front de fissure, à travers la fonction  $y \mapsto \delta a_{fis}(y)$ <sup>28</sup>.

### 5.1.2. Proposition n°1 de loi de Paris pour M4-5n

L'expression (55) peut encore être réécrite sous la forme suivante:

$$G = \frac{\int_{largeur \omega} \gamma(y) \delta a_{fis}(y) dy}{\int_{largeur \omega} \delta a_{fis}(y) dy} \quad (56)$$

avec :

$$\gamma(y) = \int_{longueur \omega} g(x,y) dx \quad (57)$$

de façon à ne faire apparaître que des quantités dépendantes de l'abscisse  $y$ , mesurée le long de la fissure.

<sup>28</sup> Il est à noter que l'expression (55) est indépendante de l'amplitude même de la fonction  $y \mapsto \delta a_{fis}(y)$  ; remplacer celle-ci par la fonction homothétique  $y \mapsto \lambda \delta a_{fis}(y)$  avec  $\lambda =$  constante positive, ne change pas la valeur de  $G$ .

La quantité  $\gamma(y)$ , qui contribue linéairement à la valeur de  $G$  en tout point  $y$  et dont on peut observer qu'elle est égale à la valeur  $G$  elle-même en situation de contraintes ou déformations planes<sup>29</sup>, apparaît alors comme un « moteur » potentiel de propagation du front de fissure au point  $y$ . Par substitution de  $G$  par  $\gamma$  dans (48), on est ainsi conduit à une première loi de Paris possible pour M4-5n :

$$\frac{da_{fis}}{dN}(P, N) = B_1 \gamma_{max}(P, N)^{\beta_1} \quad (58)$$

avec :

$$\gamma_{max}(P, N) = \underset{\text{Trajectoire charge } n^{\circ}N}{\text{Max}} \int_{\text{longueur } \omega} g(x, y(P)) dx = \text{valeur maximale de } \gamma \text{ atteinte au point } P \text{ sous le chargement } n^{\circ}N$$

$B_1, \beta_1$  = paramètres constants, avec *a priori*,  $B_1 = B$  et  $\beta_1 = \beta = \gamma/2$  si l'on se réfère aux situations de déformations ou contraintes planes.

Naturellement, cette loi n'est applicable qu'en présence d'états de contrainte en traction au voisinage du front de fissure. Au besoin, cette condition peut être vérifiée au travers du calcul des contraintes 3D livrées par le modèle M4-5n en bas de couche non fissurée ( $i - 1$ ). Notamment pour une fissure se propageant en mode I, l'équation (58) doit s'accompagner de la condition :

$$\sigma_{xx}^{(i-1)}(x = 0) = \frac{6 M_{xx}^{(i-1)}}{e^{(i-1)^2}} + \frac{N_{xx}^{(i-1)}}{e^{(i-1)}} > 0 ; \frac{da_{fis}}{dN}(P, N) = 0, \text{ sinon.} \quad (59)$$

### 5.1.3. Proposition n°2 de loi de Paris pour M4-5n

A ce jour, la formulation de lois de Paris pour M4-5n reste toutefois ouverte. Trop peu de confrontations entre retours de terrain ou essais de laboratoire avec modélisations et interprétations par M4-5n ont été effectuées, notamment en Mécanique des Chaussées, pour guider et valider le choix des formulations les plus appropriées, en fonction des usages recherchés.

En l'attente d'un tel gain d'expérience, il est possible de proposer une autre formulation de loi de Paris pour M4-5n, dérivée de (58), mais plus simple et purement locale, ne faisant intervenir que les valeurs  $g^0(P) = g(x = 0, y)$  prises par la fonction  $g$  au niveau de la fissure au lieu de son intégrale en  $x$ . Il s'agit de la loi :

$$\frac{da_{fis}}{dN}(P) = B_2 g_{max}^0(P, N)^{\beta_2} \quad (60)$$

avec :

- $g_{max}^0(P, N)$  = valeur maximale de  $g^0$  atteinte en  $P$  au cours du déplacement de la charge  $n^{\circ}N$

<sup>29</sup> Pour des champs indépendants de  $y$  (cas de contraintes ou déformations planes), l'équation (54) se réduit à :  $G = \int_{\text{longueur } \omega} g(x) dx = \gamma$

- *a priori*,  $\beta_2 = \beta_1 = \beta = \gamma/2$
- $B_2$  = coefficient à relier éventuellement à  $B$  au travers de modélisations préalables, effectuées comparativement en Mécanique 3D usuelle et en M4-5n, en conditions de déformations ou contraintes planes.

Les tableaux suivants donnent les expressions de  $g^0$  dans le cas général et le cas en déformations planes, en tenant compte des valeurs de contraintes nulles dans la couche  $n^{\circ}i$ , en bord de fissure.

Tableau 13 : Expression générale de  $g^0(y) = g(x = 0, y)$  tenant compte des efforts nuls dans la couche  $n^{\circ}i$ , situés en bord de fissure. Les valeurs de contrainte et déformation généralisées sont à prendre en  $x = 0$ .

$$g^0(y) = \frac{1}{2E} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{e^{(i-1)^2}} \left( N_{xx}^{(i-1)^2} - 2\nu N_{xx}^{(i-1)} N_{yy}^{(i-1)} + N_{yy}^{(i-1)^2} + 2(1+\nu) N_{xy}^{(i-1)^2} \right) \\ & + \frac{36}{e^{(i-1)^4}} \left( M_{xx}^{(i-1)^2} - 2\nu M_{xx}^{(i-1)} M_{yy}^{(i-1)} + M_{yy}^{(i-1)^2} + 2(1+\nu) M_{xy}^{(i-1)^2} \right) \\ & + \frac{12(1+\nu)}{5 e^{(i-1)^2}} \left( Q_x^{(i-1)^2} + Q_y^{(i-1)^2} \right) \\ & - \frac{2(1+\nu)}{15} \left( \tau_x^{(i-2,i-1)^2} - \tau_x^{(i-2,i-1)} \tau_x^{(i-1,i)} + \tau_y^{(i-2,i-1)^2} - \tau_y^{(i-2,i-1)} \tau_y^{(i-1,i)} \right) \\ & - \left( \frac{13}{35} \nu^{(i-2,i-1)^2} + \frac{9}{35} \nu^{(i-2,i-1)} \nu^{(i-1,i)} \right) \\ & + \frac{2(1+\nu)}{15} \left( \tau_x^{(i,i+1)^2} - \tau_x^{(i-1,i)} \tau_x^{(i,i+1)} + \tau_y^{(i,i+1)^2} - \tau_y^{(i-1,i)} \tau_y^{(i,i+1)} \right) \\ & + \left( \frac{13}{35} \nu^{(i,i+1)^2} + \frac{9}{35} \nu^{(i-1,i)} \nu^{(i,i+1)} \right) \\ & - E \left( \Phi_x^{(i-1)} \left( \tau_x^{(i-2,i-1)} + \tau_x^{(i-1,i)} \right) + \Phi_y^{(i-1)} \left( \tau_y^{(i-2,i-1)} + \tau_y^{(i-1,i)} \right) \right) \\ & + E \left( \Phi_x^{(i)} \left( \tau_x^{(i-1,i)} + \tau_x^{(i,i+1)} \right) + \Phi_y^{(i)} \left( \tau_y^{(i-1,i)} + \tau_y^{(i,i+1)} \right) \right) \end{aligned} \right\}$$

Tableau 14 : Expression de  $g^0 = g(x = 0)$  en déformations planes, tenant compte des efforts nuls de la couche 2, en bord de fissure. Les grandeurs sont à prendre en  $x = 0$ .

$$g^0 = \tau_1(-\phi_1 + \phi_2) + \tau_2\phi_2 + \frac{(1-\nu^2)N_1^2}{E e_1^2} + \frac{36}{E}(1-\nu^2)\frac{M_1^2}{e_1^4} + \frac{6}{5G}\frac{Q_1^2}{e_1^2} - \frac{13}{35E}\nu_0^2 - \frac{9}{35E}\nu_0\nu_1 \\ + \frac{13}{35E}\nu_2^2 + \frac{9}{35E}\nu_2\nu_1 + \frac{2(1+\nu)}{15E}\tau_2(\tau_2 - \tau_1)$$

Bien entendu, la condition (59) sur la nature de l'état de contrainte, qui doit être en traction en couche  $i - 1$ , au voisinage du front de fissure, s'applique également ici.

La proposition de loi (60) part du constat, comme le montre l'exemple plus loin, que la fonction  $g$  est rapidement décroissante en  $x$  de part et d'autre de la fissure et que la valeur de l'intégrale  $\gamma$  en  $P$  est essentiellement dictée par la quantité  $g^0(P)$  et une fonction de forme multiplicative  $\varphi$ , relativement peu dépendante de la géométrie du front de fissure à

structure M4-5n donnée (à épaisseurs et paramètres élastiques des couches donnés).  
Autrement dit :

$$g(x, y) \approx g(0, y)\varphi(x)$$

et donc :

$$\gamma(P) \approx g(0, y) \int_{\text{longueur } \omega} \varphi(x) dx = \text{Constante} \times g^0(P)$$

avec :  $\varphi$  = fonction de forme, indépendante de  $y$  et du degré de fissuration  $a_{fis}(y)$  du M4-5n.

Les valeurs  $g^0(P)$  et  $\gamma(P)$  (et donc aussi  $g_{max}^0(P)$  et  $\gamma_{max}^0(P)$ ) peuvent ainsi être considérées dans un rapport approximativement constant rendant les équations (58) et (60) voisines l'une de l'autre, à condition d'ajuster les valeurs des coefficients  $B_1, B_2$  sur une même situation de référence, comme précisé précédemment.

#### 5.1.4. Calculs de chaussée M4-5n avec remontée de fissure

Le tableau suivant (Tableau 15) récapitule les étapes de calcul nécessaires à la simulation de la propagation du front de fissure au passage d'une charge roulante, pour les lois de Paris (58) ou (60). Le schéma peut être simplifié dans le cas de charges à géométrie peu complexe (ex : roue simple, demi-essieu jumelé, ...), pour lesquelles le positionnement longitudinal le plus défavorable vis-à-vis de la fissure peut être intuité, sans besoin de recourir à des calculs préalables pour déterminer la valeur maximale de la fonction  $g$ .

Tableau 15 : Résumé des étapes de calcul pour la propagation du front de fissure au passage d'une charge roulante (chargement n°  $N$  ; hypothèse d'une fissure se développant dans le plan vertical transversal d'abscisse  $x = 0$ )

- Détermination du positionnement de charge le plus défavorable  $C_{max}$  vis-à-vis de la zone fissurée, sur la base éventuellement de plusieurs calculs préalables de la fonction  $g(x, y; C)$  pour différentes positions de charge  $C$

- Calcul de :  $g_{max}(x, y) = g(x, y; C_{max})$

- Calcul de  $\delta a_{fis}(y, N)$  par:

$$\delta a_{fis}(y, N) = B_1 \gamma_{max}(y, N)^{\beta_1}$$

ou

$$\delta a_{fis}(y, N) = B_2 g_{max}^0(y, N)^{\beta_2}$$

$$\text{si : } \sigma_{xx}^{(i-1)}(y) = \frac{6 M_{xx}^{(i-1)}}{e^{(i-1)^2}}(y) + \frac{N_{xx}^{(i-1)}}{e^{(i-1)}}(y) > 0 ; \quad \delta a_{fis}(y, N) = 0 \text{ sinon}$$

- Propagation du front de fissure sous le chargement n°  $N$  :

$$a_{fis}(y, N + 1) = a_{fis}(y, N) + \delta a_{fis}(y, N)$$

Les équations ci-dessus sont écrites pour le passage d'une seule charge, correspondant à des accroissements  $\delta a_{fis}$  de très faible amplitude. En pratique, il convient de grouper les



passages de charge en nombres  $\Delta N_i$  suffisamment grands pour obtenir des incréments  $\Delta a_{fis\ n^o i}(y)$  d'ordre de grandeur centimétrique, significatifs par rapport aux épaisseurs de couche de la structure.

Ce faisant, il pourra être calculé, à géométrie de front de fissure donnée, un accroissement « moyen » du front de fissure,  $\delta a_{fis}^{moy}(y, N_i)$ , permettant de tenir compte des variations statistiques de silhouettes et du poids des charges constituant le trafic, ainsi que du positionnement latéral des véhicules sur la chaussée (balayage). On aura alors :

$$\delta a_{fis}^{moy}(y, N_i) = \sum_{\substack{\text{scénarios} \\ \text{de fréquences } f_j \\ (\sum f_j = 1)}} f_j \times \delta a_{fis} \left( y, N_i; \underbrace{\text{silhouette charge, poids charge; balayage, ...}}_{\text{scénario } n^o j} \right) \quad (61)$$

et :

$$a_{fis}(y, N_i + \Delta N_i) = a_{fis}(y, N_i) + \delta a_{fis}^{moy}(y, N_i) \Delta N_i$$

## 5.2. Taux de restitution d'énergie $G$ d'une structure M4-5n soumise à une délaminé d'interface

Le taux de restitution d'énergie élastique des structures M4-5n peut être également évalué dans le cas d'une surface de délaminé se produisant à l'interface entre deux couches. L'expression de  $G$  diffère dans ce cas de celle obtenue précédemment. Rétablissons son expression, qui peut être trouvée également dans la littérature [Chabot, 2013].

Plaçons-nous dans le cadre des hypothèses et notations de la section 3.2, où pour rappel l'aire délaminée  $\omega_d$  est supposée située au niveau de l'interface  $(i, i + 1)$  et caractérisée par des efforts d'interface  $\tau_x^{(i,i+1)}$ ,  $\tau_y^{(i,i+1)}$ ,  $v^{(i,i+1)}$  nuls en tout point intérieur à celle-ci<sup>30</sup>. Ces champs sont donc en particulier discontinus sur la frontière  $\partial\omega_d$  en sautant de valeurs *a priori* non nulles  $\tau_x^{+(i,i+1)}$ ,  $\tau_y^{+(i,i+1)}$ ,  $v^{+(i,i+1)}$  sur le bord « extérieur » de  $\partial\omega_d$ , à des valeurs nulles  $\tau_x^{-(i,i+1)} = \tau_y^{-(i,i+1)} = v^{-(i,i+1)} = 0$  sur le contour intérieur.

Considérons un accroissement « élémentaire » de la surface  $\omega_d$ , décrit par le déplacement positif, de petite amplitude  $\delta a_{fis}(s)$ , où :

$s$  = abscisse curviligne décrivant le contour  $\partial\omega_d$  de l'aire délaminée  
 $\delta a_{fis}(s)$  = déplacement de la frontière au point d'abscisse  $s$ , dans la direction sortante, normale à  $\partial\omega_d$ .

<sup>30</sup> On suppose ici l'aire  $\omega_d$  « ouverte », sans contact entre les lèvres supérieure et inférieure (condition à vérifier *a posteriori* à partir du calcul des déplacements verticaux  $V$  en bas et haut de couches  $i - 1, i$  :  $V^{(i+1)}(x, y, z^{+(i,i+1)}) \geq V^{(i)}(x, y, z^{-(i,i+1)})$  pour  $(x, y) \in \omega_d$ . Cette condition peut toutefois ne pas être vérifiée, lorsque les charges de surface sont à l'aplomb de l'aire délaminée et remettent en contact ses bords supérieur et inférieur. Cette situation, observée à maintes reprises sur chaussées instrumentées, nécessite pour sa modélisation, la prise en compte de conditions de contact à fonctionnement unilatéral sur la base d'algorithmes de calculs itératifs.

L'augmentation correspondante  $\delta A$  de l'aire délaminiée  $A = \int_{\omega_d} d\omega$  est donnée par :

$$\delta A = \int_{\partial\omega_d} \delta a_{fis}(s) ds \quad (62)$$

Pour calculer la variation correspondante  $\delta W_{elasW}$  de l'énergie élastique emmagasinée dans la structure, repartons de l'expression  $W_{elasW}$  en distinguant l'intérieur et l'extérieur de la surface  $\omega_d$ , soit :

$$W_{elasW} = \int_{\omega-\omega_d} w_{elasW}(\Sigma) d\omega + \int_{\omega_d} w_{elasW}(\Sigma) d\omega \quad (63)$$

Par différentiation de cette expression, à frontière  $\partial\omega_d$  variable, on a<sup>31</sup> :

$$\delta W_{elasW} = \int_{\omega-\omega_d} w_{elasW}(\delta\Sigma) d\omega + \int_{\omega_d} w_{elasW}(\delta\Sigma) d\omega + \int_{\partial\omega_d} (w_{elasW}(\Sigma^+) - w_{elasW}(\Sigma^-)) \delta a_{fis}(s) ds \quad (64)$$

soit, en regroupant les 2 premières intégrales :

$$\begin{aligned} \delta W_{elasW} &= \int_{\omega} w_{elasW}(\delta\Sigma) d\omega + \int_{\partial\omega_d} (w_{elasW}(\Sigma^+) - w_{elasW}(\Sigma^-)) \delta a_{fis}(s) ds \\ &= \int_{\omega} w_{elasW,\Sigma} \delta\Sigma d\omega + \int_{\partial\omega_d} (w_{elasW}(\Sigma^+) - w_{elasW}(\Sigma^-)) \delta a_{fis}(s) ds \end{aligned}$$

ou encore :

$$\delta W_{elasW} = \int_{\omega} \varepsilon \delta\Sigma d\omega + \int_{\partial\omega_d} (w_{elasW}(\Sigma^+) - w_{elasW}(\Sigma^-)) \delta a_{fis}(s) ds \quad (65)$$

avec :

$\delta\Sigma$  = variation, à efforts extérieurs constants, du champ de contrainte généralisé, induit par la variation de surface délaminiée  $\delta a_{fis}(s)$  ;

$\varepsilon = w_{elasW,\Sigma}$  = champ de déformation généralisé ;

$\Sigma^+$  = champ de contrainte sur la lèvre extérieure du contour de  $\partial\omega_d$  ;

<sup>31</sup> L'équation (64) résulte de la relation classique, portant sur la dérivée temporelle de l'intégrale 2D ou 3D d'une fonction  $f(M, t)$  dépendant du point courant  $M$  et du temps  $t$ , définie sur un domaine variable  $\Omega(t)$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(M, t) dM = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial f(M, t)}{\partial t} dM + \int_{\partial\Omega(t)} f(M, t) \overrightarrow{v(M)} \cdot \overrightarrow{n(M)} dM ,$$

avec :  $\vec{v}(M)$  = vitesse du point  $M$  situé sur la frontière  $\partial\Omega(t)$ ,  $\overrightarrow{n(M)}$  = normale unitaire sortante en  $M$ , au domaine  $\Omega(t)$ .

$\Sigma^-$  = champ de contrainte sur la lèvre inférieure du contour de  $\partial\omega_d$ .

Les champs  $\varepsilon, \Sigma^+, \Sigma^-$  sont ceux régnant dans la structure avant accroissement de  $\omega_d$ .

La première des intégrales dans (65) peut alors être calculée à partir du Principe des Puissances Virtuelles de l'Annexe A4, à savoir :

$$\int_{\omega} \varepsilon \delta \Sigma d\omega = \int_{\omega} U \delta \bar{F} d\omega$$

où  $U$  est le champ de déplacement associé à  $\varepsilon$  et  $\delta \bar{F}$  le champ de force extérieure associé au champ de contrainte  $\delta \Sigma$ . Or comme le montre la différentiation des équations d'équilibre M4-5n, cette opération n'introduit pas de termes autres que les différentielles des champs de contrainte, dans le cas de la propagation d'une surface de délamination se produisant à efforts donnés constants. Autrement dit, le vecteur  $\delta \Sigma$  est ici nul et par conséquent  $\int_{\omega} \varepsilon \delta \Sigma d\omega = 0$ , ce qui réduit l'expression de  $\delta W_{elasW}$  à l'intégrale de contour :

$$\delta W_{elasW} = \int_{\partial\omega_d} (w_{elasW}(\Sigma^+) - w_{elasW}(\Sigma^-)) \delta a_{fis}(s) ds \quad (66)$$

Or la différence  $w_{elasW}(\Sigma^+) - w_{elasW}(\Sigma^-)$  ne met en jeu que les contraintes subissant des sauts de part et d'autre de la frontière  $\partial\omega_d$ . Les expressions données en annexe A.1.4 montrent que cette différence se borne aux termes en  $\tau_x^{+(i,i+1)}$ ,  $\tau_y^{+(i,i+1)}$ ,  $\nu^{+(i,i+1)}$  apparaissant dans les quatre différences  $w_Q^{(i)}(\Sigma^+) - w_Q^{(i)}(\Sigma^-)$ ,  $w_Q^{(i+1)}(\Sigma^+) - w_Q^{(i+1)}(\Sigma^-)$ ,  $w_v^{(i)}(\Sigma^+) - w_v^{(i)}(\Sigma^-)$ ,  $w_v^{(i+1)}(\Sigma^+) - w_v^{(i+1)}(\Sigma^-)$ .

On aboutit ainsi à l'expression explicite suivante de  $\delta W_{elasW}$  (Tableau 16).

Tableau 16 : Expression de la variation d'énergie élastique  $\delta W_{elasW}$  dans le cas d'un délaminage de l'interface  $(i, i + 1)$ .  $(\tau_x^{+(i,i+1)}, \tau_y^{+(i,i+1)}, \nu^{+(i,i+1)})$  = valeurs des contraintes d'interface sur le bord extérieur de l'aire délaminée.

$$\delta W_{elasW} = \int_{\partial\omega_d} g_{delam}(s) \delta a_{fis}(s) ds$$

avec :

$$g_{delam}(s) = \frac{(1 + \nu^{(i)}) e^{(i)}}{15 E^{(i)}} \left( \begin{array}{l} 2 \tau_x^{+(i,i+1)2} - \tau_x^{+(i,i+1)} \tau_x^{(i-1,i)} - \frac{3}{e^{(i)}} \tau_x^{+(i,i+1)} Q_x^{(i)} \\ + 2 \tau_y^{+(i,i+1)2} - \tau_y^{+(i,i+1)} \tau_y^{(i-1,i)} - \frac{3}{e^{(i)}} \tau_y^{+(i,i+1)} Q_y^{(i)} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(1 + \nu^{(i+1)}) e^{(i+1)}}{15 E^{(i+1)}} \left( 2 \tau_x^{+(i,i+1)^2} - \tau_x^{+(i,i+1)} \tau_x^{(i+1,i+2)} - \frac{3}{e^{(i+1)}} \tau_x^{+(i,i+1)} Q_x^{(i+1)} \right) \\
 & + \frac{e^{(i)}}{70 E^{(i)}} \left( 13 \nu^{+(i,i+1)^2} + 9 \nu^{+(i,i+1)} \nu^{(i-1,i)} \right) \\
 & + \frac{e^{(i+1)}}{70 E^{(i+1)}} \left( 13 \nu^{+(i,i+1)^2} + 9 \nu^{+(i,i+1)} \nu^{(i+1,i+2)} \right)
 \end{aligned}$$

En faisant le pendant avec la loi de Paris n°2 énoncée ci-avant (60), cette expression pourrait être utilisée dans une loi locale de délamination par fatigue, du type :

$$\frac{da_{fis}}{dN}(s) = B_3 g_{delam\ max}(s, N)^{\beta_3}, \text{ en tout point } s \text{ du front } \partial\omega_d$$

avec :

- $g_{delam\ max}$  = valeur maximale de  $g_{delam}$  atteinte au passage de la charge roulante  $N$
- $B_3, \beta_3$  = coefficients, fonction *a priori* des matériaux des couches  $i, i + 1$  et de la condition de réalisation de l'interface (avec ou sans matériau d'apport, avec ou sans traitement,...).

A noter toutefois que pour être physiquement acceptable, l'utilisation de l'expression de  $g_{delam}$  figurant dans le Tableau 16 est à accompagner de conditions sur les états de contrainte d'interface. En particulier la contribution à  $g_{delam}$  de l'effort normal  $\nu^{+(i,i+1)}$  ne semble devoir être comptabilisée que dans le cas d'un effort d'arrachement de signe positif, doublement préjudiciable à la durabilité mécanique de l'interface par les efforts de traction produits et la moindre résistance induite vis-à-vis des efforts de cisaillement. A l'inverse, un effort normal de compression (signe négatif) serait plutôt de nature à aider l'interface à résister contre les efforts de cisaillement et à ralentir les effets de délaminage<sup>32,33</sup>.

Une possibilité pourrait être d'adopter dans ce cas l'expression réduite de la fonction  $g_{delam}$  proposée ci-dessous (Tableau 17).

Tableau 17 : Proposition de fonction  $g_{delam}$  en cas d'effort normal  $\nu^{+(i,i+1)}$  en compression

$$\begin{aligned}
 & g_{delam}(s) = \\
 & \frac{(1 + \nu^{(i)}) e^{(i)}}{15 E^{(i)}} \left( 2 \tau_x^{+(i,i+1)^2} - \tau_x^{+(i,i+1)} \tau_x^{(i-1,i)} - \frac{3}{e^{(i)}} \tau_x^{+(i,i+1)} Q_x^{(i)} \right) \\
 & + \frac{e^{(i)}}{70 E^{(i)}} \left( 13 \nu^{+(i,i+1)^2} + 9 \nu^{+(i,i+1)} \nu^{(i-1,i)} \right)
 \end{aligned}$$

<sup>32</sup> Cf. loi de frottement de Coulomb avec cohésion, par exemple.

<sup>33</sup> De tels changements de signe des contraintes normales s'exerçant sur les interfaces sont particulièrement observables (sur chaussée instrumentée) en présence de sollicitations apportées par des charges roulantes. Les interfaces sont généralement en compression à l'aplomb des charges elles-mêmes, mais peuvent se trouver en traction à l'approche des roues ou lors de leur éloignement, notamment en cas d'intersections entre fissures verticales et surfaces de délaminage.

$$+ \frac{(1 + \nu^{(i+1)}) e^{(i+1)}}{15 E^{(i+1)}} \left( \begin{array}{l} 2 \tau_x^{+(i,i+1)^2} - \tau_x^{+(i,i+1)} \tau_x^{(i+1,i+2)} - \frac{3}{e^{(i+1)}} \tau_x^{+(i,i+1)} Q_x^{(i+1)} \\ + 2 \tau_y^{+(i,i+1)^2} - \tau_y^{+(i,i+1)} \tau_y^{(i+1,i+2)} - \frac{3}{e^{(i+1)}} \tau_y^{+(i,i+1)} Q_y^{(i+1)} \end{array} \right)$$

## 6. Exemple de modélisation M4-5n de remontée de fissure par fatigue dans une chaussée

L'exemple traité ici est une première application en Mécanique des Chaussées des éléments développés en 5.1. Le jeu de données est inspiré d'un essai *in situ* FABAC, réalisé pour étudier la remontée de fissure par fatigue dans une chaussée bitumineuse.

Les résultats présentés à ce stade visent essentiellement à montrer le bon fonctionnement du script FreeFem++ élaboré dans le cadre de ce projet (tranches 1 et 2). L'application de ces travaux à des usages plus finalisés, dont les objectifs peuvent être *a priori* nombreux (recherches, expertises, évolutions de doctrine de dimensionnement ou réparation de chaussée...) devra se faire progressivement par adaptations, calage et améliorations du présent outil.

La structure de chaussée considérée a été construite sur l'aire d'essais FABAC de l'IFSTTAR (Nantes). Elle est constituée de deux couches bitumineuses (EME 5cm, EME 6cm), reposant sur une couche de grave non traitée (GNT 33cm) et le sol. La planche d'une longueur de 4m et d'une largeur de 2m est parcourue sur ses deux mètres centraux par les essieux FABAC. Deux réglettes métalliques, de hauteur 2cm, ont été introduites en cours de construction dans le plan transversal médian de la planche, en bas de couche EME (plan vertical d'équation  $x = 0$  dans la suite). Elles sont destinées à favoriser l'amorce de fissures transversales, remontant dans la structure par effet de fatigue. L'essai et une partie des résultats expérimentaux sont rapportés dans [Nguyen et al., 2020, Chupin et al., 2020].

Le modèle M4-5n de la structure comporte aussi trois couches, mais distribuées différemment des couches physiques de la structure réelle. Les couches 1 et 2 du M4-5n sont destinées à modéliser, comme décrit en 5.1.1, la remontée de fissure dans l'EME. La couche n°1 correspond à la partie haute, non fissurée, de l'EME ; la couche 2 à la partie basse, fissurée. Elles sont séparées par une interface cylindrique, de génératrices parallèles à l'axe  $x$  s'appuyant sur la géométrie du front de fissure. Leurs épaisseurs, de somme constante égale à 11cm, sont définies par la hauteur de fissure  $a_{fis}(y, N)$ :  $e^{(2)}(y, N) = a_{fis}(y, N)$  et  $e^{(1)}(y, N) = 11cm - a_{fis}(y, N)$ . A l'état initial ( $N = 0$ ), la hauteur fissurée est supposée égale à 2cm (hauteur de réglette introduite à la construction) sur l'ensemble de la largeur de la chaussée ; d'où :  $e^{(2)}(y, N = 0) = 2cm$ ,  $e^{(1)}(y, N = 0) = 9cm$ .

La couche 3 du modèle M4-5n et les ressorts de Winkler situés sous cette couche représentent globalement le comportement de la GNT et du sol. Le module de la couche 3 est pris égal à celui estimé pour la GNT de la structure FABAC ( $E_3 = 260 MPa$ ). L'épaisseur de la couche 3 et la raideur  $k$  des ressorts de Winkler sont déterminées par calage comme

indiqué plus loin<sup>34</sup>. Les conditions limites sont supposées à déplacement nul, dans les directions normales aux faces extérieures du maillage et à efforts nuls dans les directions tangentes.

Le calcul de propagation de fissure effectué en 6.3 simule l'effet de répétition des charges FABAC. Celles-ci sont supposés conformes au demi-essieu standard de la méthode de dimensionnement<sup>35</sup>. Le calcul est effectué sans balayage. Les roues sont placées directement dans le calcul à l'aplomb du plan de fissuration ( $x = 0$ ), sans modéliser leur déplacement longitudinal, en considérant cette position comme la plus préjudiciable vis-à-vis de la remontée de fissure. Les calculs sont effectués pour la loi de Paris n°2 proposée en section 5.1.3.

Le Tableau 18 récapitule les données géométriques et mécaniques considérées pour chacune des couches. Un certain nombre de ces données est déduit de calculs préalables effectués en déformations planes, présentés ci-après.

Tableau 18 : *Données de la structure M4-5n prise en exemple. Le module d'Young considéré pour les couches d'EME (15150 MPa) est déduit de la campagne de module complexe effectuée sur le matériau. Il correspond à une température de 10°C et une vitesse de charge roulante de 5 Km/h. Les calages de l'épaisseur de la 3<sup>ème</sup> couche du modèle M4-5n, de la raideur des ressorts de Winkler et du coefficient  $B_2$  de la loi de Paris sont issus de calculs préalables par EF usuels et par M4-5n, réalisés en déformations planes (voir section 6.2)*

	Epaisseurs M4-5n (cm)	E (MPa, 10°C)	$\nu$	$B_2$ Loi de Paris	$\beta_2$ Loi de Paris
EME couche M4-5n n°1	$e^{(1)}(y)$ = 11 – $e^{(2)}(y)$	15150	0,35	9,6	2,85
EME couche M4-5n n°2	$e^{(2)}(y)$ = hauteur fissure	15150	0,35	9,6	2,85
GNT+sommet Sol couche M4-5n n°3	80	260	0,35		
Sol sous couche n°3		$k_{Winkler}$ 60 MPa/m			

## 6.1. Technique de prise en compte de la fissure et maillage de la structure

La technique de calcul utilisée pour modéliser la présence de fissure dans le plan médian transversal  $x = 0$  de la structure repose ici sur un maillage en deux parties distinctes du domaine  $\omega$ , avec raccordement par pénalisation des degrés de liberté possédant des valeurs continues de part et d'autre de la fissure. La méthode de calcul est donc différente de celle

<sup>34</sup> Un modèle M4-5n à 4 couches, tenant explicitement compte de la couche de GNT serait possible, mais nécessiterait d'accroître la dimension des tableaux de travail réservés par Freefem++.

<sup>35</sup> Charge de 65 kN appliquée au travers de 2 empreintes circulaires à pression uniforme.

décrite en 3.2 basée sur l'utilisation de fonctions d'endommagement. Elle permet ici un calcul plus précis des champs M4-5n au voisinage de l'aire fissurée.

Le domaine  $\omega = \underbrace{[-2,2]}_x \times \underbrace{[-1,1]}_y$  est ainsi divisé en deux sous-domaines  $\omega^{gauche} = [-2,0] \times [-1,1]$  et  $\omega^{droit} = [0,2] \times [-1,1]$ , situés de part et d'autre de la fissure, maillés indépendamment, en assurant toutefois la coïncidence des maillages des segments  $x = 0^-$  de  $\omega^{gauche}$  et  $x = 0^+$  de  $\omega^{droit}$ . Ceci permet de garantir par pénalisation<sup>36</sup> les égalités 2 à 2 des degrés de liberté à valeurs continues, se faisant face en  $x = 0$ . Cela concerne tous les couples de degrés de liberté de même nature (mêmes champs, mêmes composantes spatiales, mêmes indices de couche ou d'interface) situés en  $x = 0^-$  et  $x = 0^+$ , hormis les couples de déplacements de la couche fissurée n°2  $(U_x^{-(2)}, U_x^{+(2)}), (U_y^{-(2)}, U_y^{+(2)}), (V^{-(2)}, V^{+(2)}), (\Phi_x^{-(2)}, \Phi_x^{+(2)}), (\Phi_y^{-(2)}, \Phi_y^{+(2)})$ .

## 6.2. Calculs préalables par EF usuels et par M4-5n en déformations planes, calage du modèle M4-5n

Le modèle M4-5n envisagé pour la simulation de l'essai de fatigue FABAC comporte trois paramètres à valeurs indéterminées initialement ; il s'agit de :

- l'épaisseur  $e^{(3)}$  de la couche n°3 supposée simuler le comportement combiné de la couche de GNT de 33cm et du haut du sol
- la raideur  $k_{Winkler}$  des ressorts de Winkler simulant le bas du sol
- la valeur  $B_2$  de la constante de la loi de Paris<sup>37</sup>.

La rigidité  $E_3$  du modèle M4-5n est pour sa part fixée égale à la valeur estimée du module d'Young de la GNT (260 MPa), afin d'assurer le bon ordre de grandeur des déformations verticales  $\varepsilon_{zz}$  en partie haute de ce matériau.

Les valeurs des paramètres  $e^{(3)}, k_{Winkler}$  sont alors recherchées de façon à assurer pour les différentes longueurs de fissure  $a_{fis}$ , la proximité des modélisations de la structure par M4-5n et par éléments finis usuels<sup>38</sup>, en termes de déflexion et taux de restitution d'énergie  $G(a_{fis})$ . La démarche est restreinte au cas de calculs effectués en déformations planes, permettant une évaluation aisée de la courbe  $G(a_{fis})$  par EF<sup>39</sup>.

La Figure 12 présente ainsi pour l'exemple retenu dans ce rapport, les maillages EF 2D et M4-5n utilisés pour la détermination préalable des paramètres  $e^{(3)}$  et  $k_{Winkler}$ . Un compromis raisonnable entre les deux types de modélisation, aussi bien en termes de déflexion que de courbes  $G(a_{fis})$  est obtenu pour les valeurs des paramètres indiquées dans le Tableau 18. La Figure 13 montre à titre d'exemple la comparaison des courbes

<sup>36</sup> La technique de pénalisation, d'usage classique en éléments finis, consiste à ajouter à la matrice de rigidité globale du système et sur les lignes et colonnes des degrés de liberté à lier entre eux, une matrice  $2 \times 2$  de la forme  $\begin{bmatrix} K & K \\ -K & K \end{bmatrix}$ .  $K$  est un coefficient choisi de valeur élevée par rapports aux autres termes matriciels

<sup>37</sup> La valeur  $\beta_2 = 2,85$  est déduite de la relation  $\beta = \frac{\alpha}{2}$  avec  $\alpha = 5,7$ , qui est un ordre de grandeur typique des exposants tirés des droites de fatigue expérimentales des EME

<sup>38</sup> La modélisation EF est elle-même supposée calée par rapport aux vraies déflexions mesurées *in situ* sous charges données.

<sup>39</sup> Par utilisation par exemple de la méthode classique des compliances

$G(a_{fis})$  issues des deux modes de calcul. Malgré les techniques de modélisation assez différentes entre M4-5n et éléments finis 2D usuels, les courbes présentent des variations et ordres de grandeur voisins sur la plage de hauteur de fissuration allant de 2 à 8 cm.

Ces calculs permettent aussi d'ajuster les valeurs des coefficients  $B_1$ ,  $B_2$  (Eq. 55, 57) en fonction du coefficient  $B$  de la loi de Paris originelle (Eq. 48) de façon à rendre voisines les cinétiques de propagation de fissure prédites par EF 2D et M4-5n (Figure 14)<sup>40</sup>.

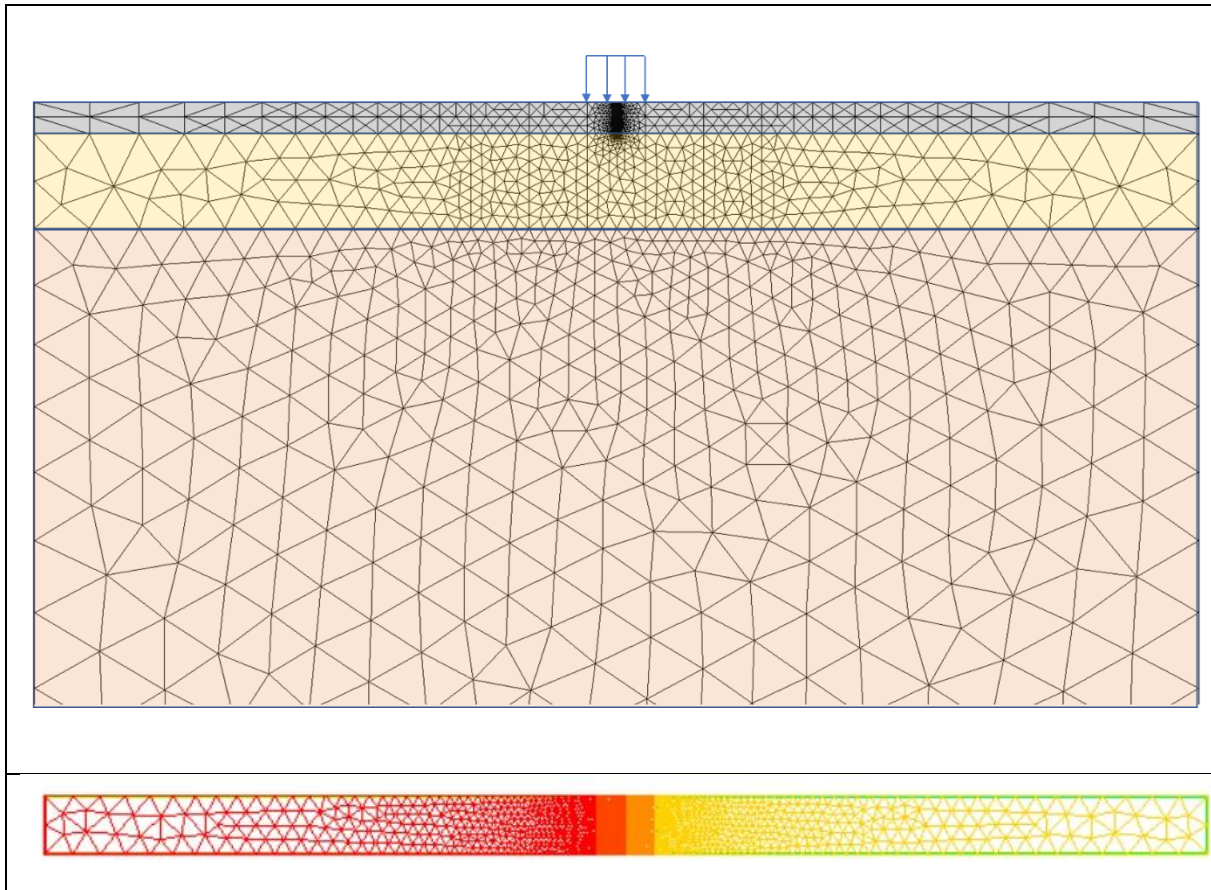


Figure 12 : Maillages EF 2D et M4-5nW 2D utilisés pour la détermination des paramètres  $e^{(3)}$  et  $k_{Winkler}$ . Le maillage EF correspond à la coupe verticale de la structure (de haut en bas : EME 11cm, GNT 33cm, sol « infini »). Le maillage M4-5n correspond à la vue de dessus pour une largeur de structure de choix arbitraire, permettant un découpage en triangles. Le chargement est constitué dans les deux cas d'une bande transversale à pression verticale uniforme, centrée sur la fissure et de largeur (en  $x$ ) égale à 20cm.

<sup>40</sup> On suppose connus ici les paramètres de la loi de Paris usuelle, de l'EME



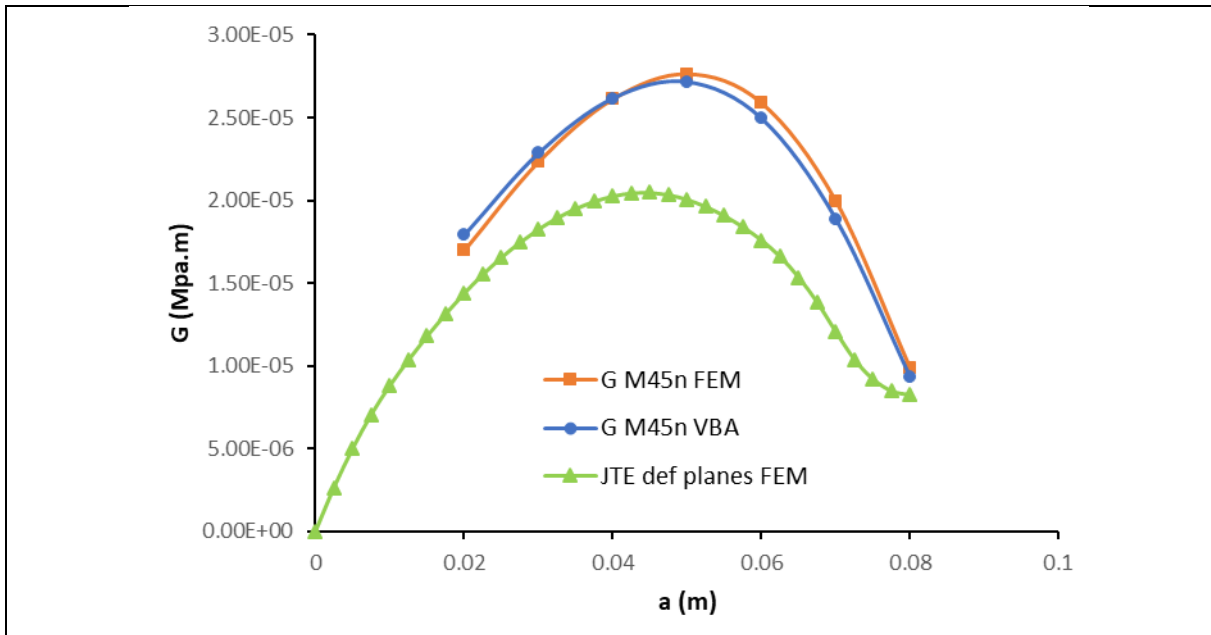


Figure 13 : Comparaison des courbes  $G(a)$  calculées en déformations planes par M4-5n et par EF 2D. Les courbes FEM et VBA sont déduites de la même modélisation M4-5n, mais calculées par des codes indépendants (méthode de résolution en éléments finis mixtes 2D au sein de l'environnement FreeFem++ pour la courbe orange ; méthode de résolution en éléments finis mixtes 1D développée en Visual Basic pour la courbe bleue).

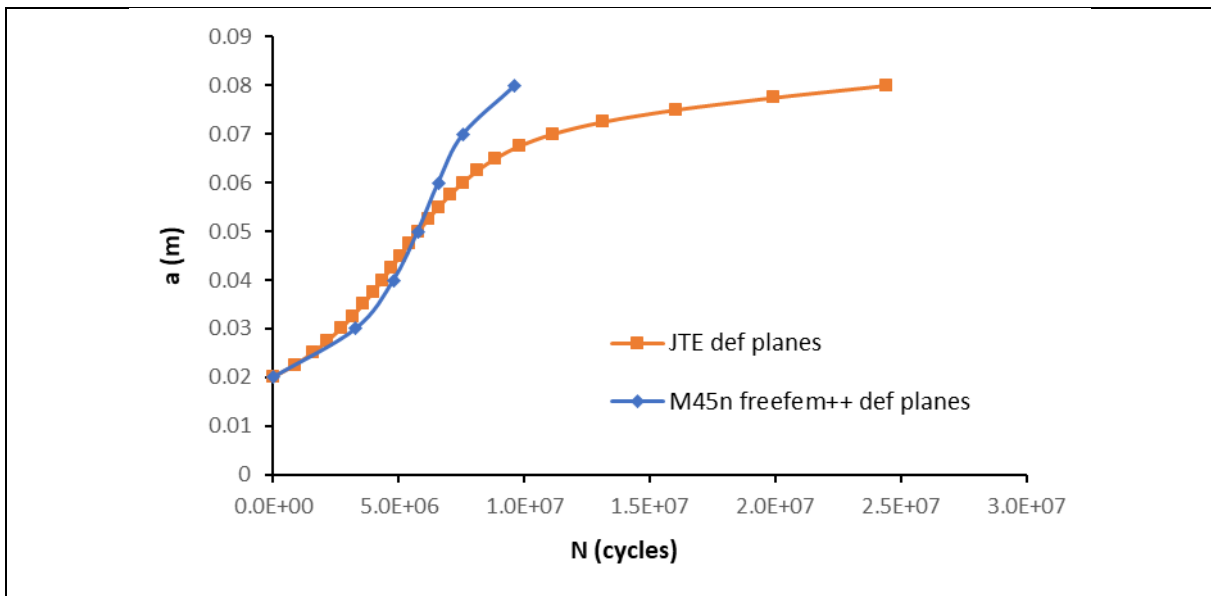


Figure 14 : Comparaison des cinétiques de propagation de fissure  $a_{fis}(N)$  prédites en déformations planes par EF-2D et par M4-5n (utilisation de la loi de Paris n°2 pour la valeur  $B_2$  du Tableau 18 et de la courbe  $g^0(a_{fis})$  de la Figure 15 : Valeurs  $g^0$  de  $g$  sur le front de fissure ( $x = 0$ ) en fonction de la hauteur de fissure  $a_{fis}$  (calculs M4-5n en déformations planes ; les courbes orange et bleue sont déduites comme précédemment des deux codes indépendants, développés sous environnement FreeFem++ pour l'un et sous Visual Basic pour l'autre).

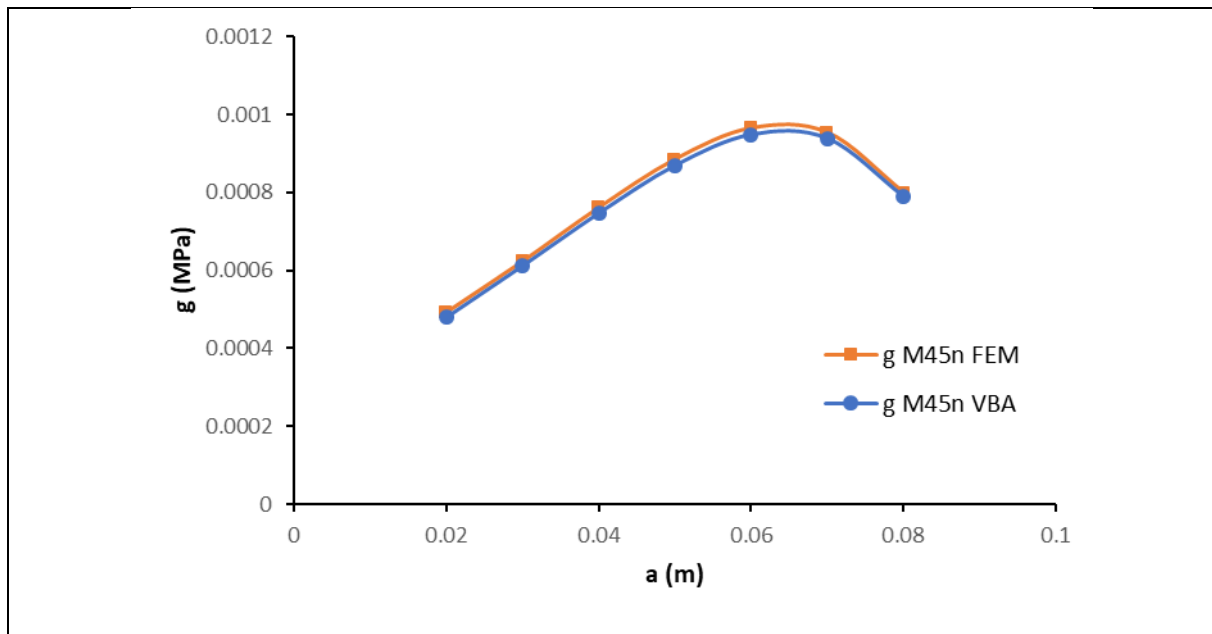


Figure 15 : Valeurs  $g^0$  de  $g$  sur le front de fissure ( $x = 0$ ) en fonction de la hauteur de fissure  $a_{fis}$  (calculs M4-5n en déformations planes ; les courbes orange et bleue sont déduites comme précédemment des deux codes indépendants, développés sous environnement FreeFem++ pour l'un et sous Visual Basic pour l'autre)

L'exemple permet au passage d'illustrer la variation de  $g$  en fonction de l'abscisse  $x$  et de mettre en évidence le poids dans l'intégrale  $\gamma$  des seules valeurs de  $g$  situées au voisinage du front de fissure (Figure 16).

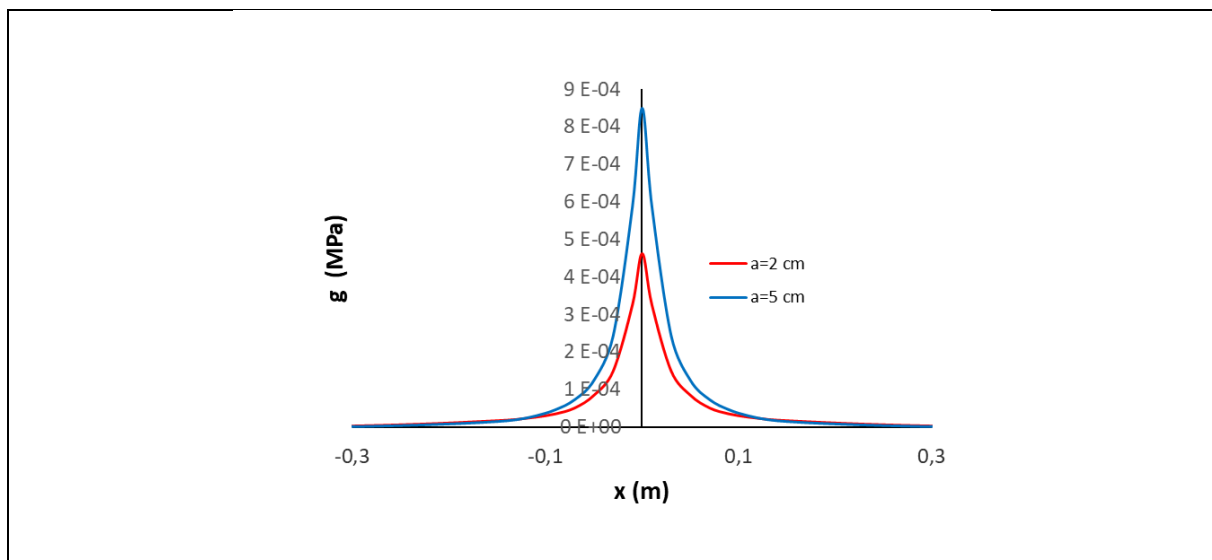


Figure 16 : Exemples de courbes  $g(x)$  calculées par M4-5n en déformations planes pour les hauteurs de fissure  $a_{fis} = 2$  cm et  $a_{fis} = 5$  cm. Les courbes sont homothétiques à peu de chose près, montrant la quasi-factorisation de  $g(x)$  sous forme de produit entre valeurs  $g^0$  sur l'axe  $x = 0$  et fonction de forme  $\varphi(x)$ . Seules les valeurs  $g(x)$  situées dans une bande d'environ 10 cm autour de la fissure contribuent significativement à la valeur du taux de restitution d'énergie  $G$ .

Le Tableau 19 présente à titre d'exemple la contribution de chacun des termes de l'intégrande  $g(x)$  (cf. Tableau 14) à la valeur du taux de restitution d'énergie  $G = \gamma$  pour les calculs M4-5n effectués, en déformations planes. La hauteur de fissure est ici de 5cm. Les contributions prépondérantes sont celles ici du moment  $M_{xx}^{(1)} = M_1$  et de l'effort normal  $N_{xx}^{(1)} = N_1$  de la couche n°1 représentés sur la Figure 17. Ces deux quantités permettent de vérifier au passage que l'état de contrainte  $\sigma_{xx}^{(1)} = \sigma_1$  en bas de couche 1 est en traction au voisinage du front de fissure et donc source de fatigue structurale sous charges répétées (Figure 18). L'ensemble de ces courbes met en exergue la « concentration de contraintes » créée dans l'EME sur une vingtaine de centimètres, par un chargement passant au-dessus de la fissure.

Tableau 19 : Contribution algébrique des différents termes de l'intégrande  $g(x)$  à la valeur de  $\gamma$  pour l'exemple traité dans cette section. La hauteur de fissure est ici de 5 cm.

Termes de l'intégrande $g(x)$	Contribution algébrique à la valeur de $\gamma$
$\frac{(1 - \nu^2) N_1^2}{E e_1^2}$	34%
$-\frac{(1 - \nu^2) N_2^2}{E e_2^2}$	-17%
$\frac{36}{E} (1 - \nu^2) \frac{M_1^2}{e_1^4}$	116%
$-\frac{36}{E} (1 - \nu^2) \frac{M_2^2}{e_2^4}$	-11%
$\frac{6 Q_1^2}{5G e_1^2}$	9%
$-\frac{6 Q_2^2}{5G e_2^2}$	-5%
$\tau_1(-\phi_1 + \phi_2) + \tau_2\phi_2$	-25%
Autres termes	0%
<b>Total</b>	<b>100%</b>

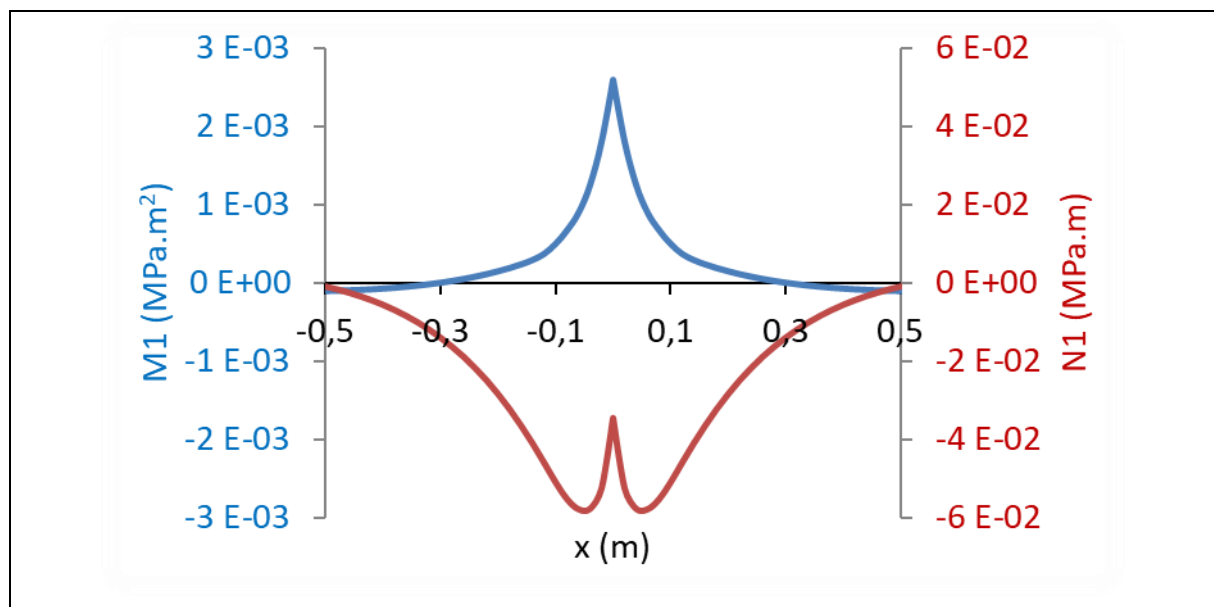


Figure 17: Courbes de moment  $M_{xx}^{(1)} = M_1$  (bleu) et d'effort normal  $N_{xx}^{(1)} = N_1$  (rouge) dans la première couche, en fonction de  $x$  pour le calcul M4-5n effectué en déformations planes (hauteur de fissure  $a = 5$  cm). Ces grandeurs jouent un rôle prépondérant dans la valeur du taux de restitution d'énergie de la structure.

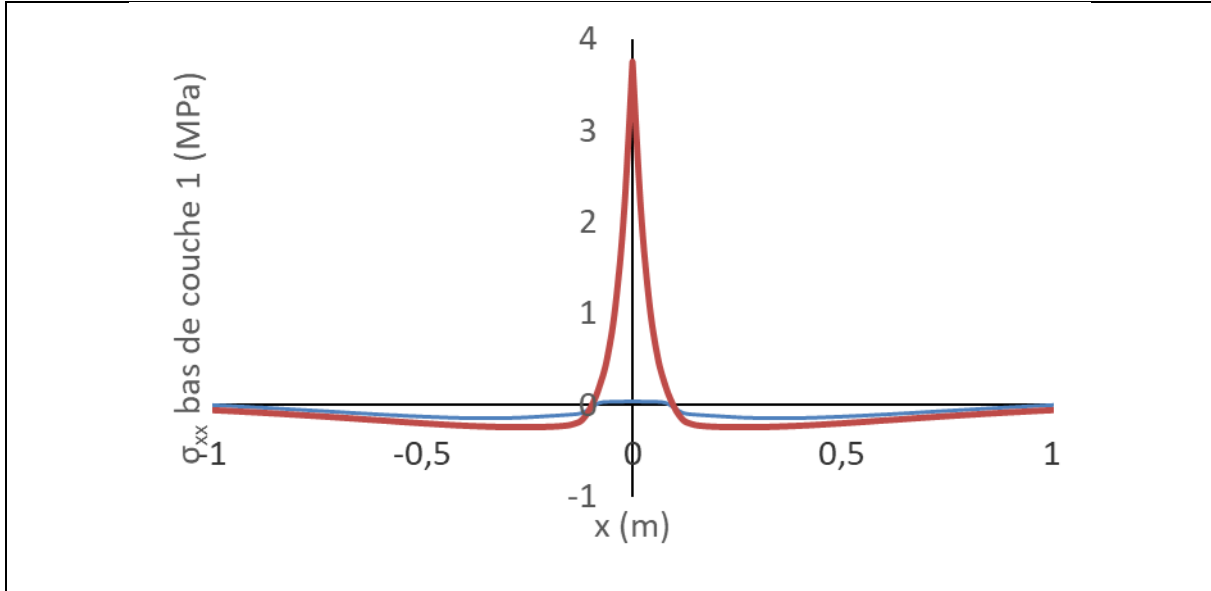


Figure 18 : En rouge : Graphe de la contrainte  $\sigma_{xx}^{(1)}$  en fonction de  $x$ , en bas de la première couche M4-5n pour  $a = 5$  cm :  $\sigma_{xx}^{(1)} = \frac{6 M_{xx}^{(1)}}{e^{(1)2}} + \frac{N_{xx}^{(1)}}{e^{(1)}}$  avec  $e^{(1)} = 6$  cm. La valeur positive de cette quantité en  $x = 0$  permet de confirmer que l'EME situé au-dessus du front de fissure est en état de traction et donc sujet à propagation de fissure par fatigue. En bleu : Graphe de la contrainte  $\sigma_{xx}^{(1)}(x)$  dans l'EME en absence de fissure, pour la cote  $\Delta y = a = 5$  cm comptée depuis le bas de la couche 2. Ces valeurs situées près de l'axe neutre des deux couches physiques d'EME, d'épaisseur totale 11cm lorsque celles-ci sont intègres, sont pratiquement nulles.

### 6.3. Simulation de la remontée de fissure en fatigue

A partir des éléments précédents (Partie 5) et du jeu de données établi ci-avant (Tableau 18), il est à présent possible d'effectuer la simulation « 3D » de l'essai FABAC par M4-5n en modélisant la remontée de fissure par fatigue dans les couches d'EME. La Figure 19 présente le maillage M4-5n constitué de triangles à 3 nœuds, utilisé dans le script FreeFem++ pour ces calculs.

Les calculs sont effectués pour le demi-essieu standard de la méthode française de dimensionnement des chaussées, qui fait partie de la panoplie des chargements usuels testés sur le banc d'essai FABAC. Les charges sont directement placées sur la fissure, considérée comme la position longitudinale la plus défavorable pour la chaussée. Elles sont par ailleurs centrées transversalement sur l'axe de chaussée, sans considérer de balayage en  $y$  (fonctionnalité non intégrée aux machines FABAC). Les empreintes circulaires des roues sont explicitement maillées pour le bon respect des forces appliquées.

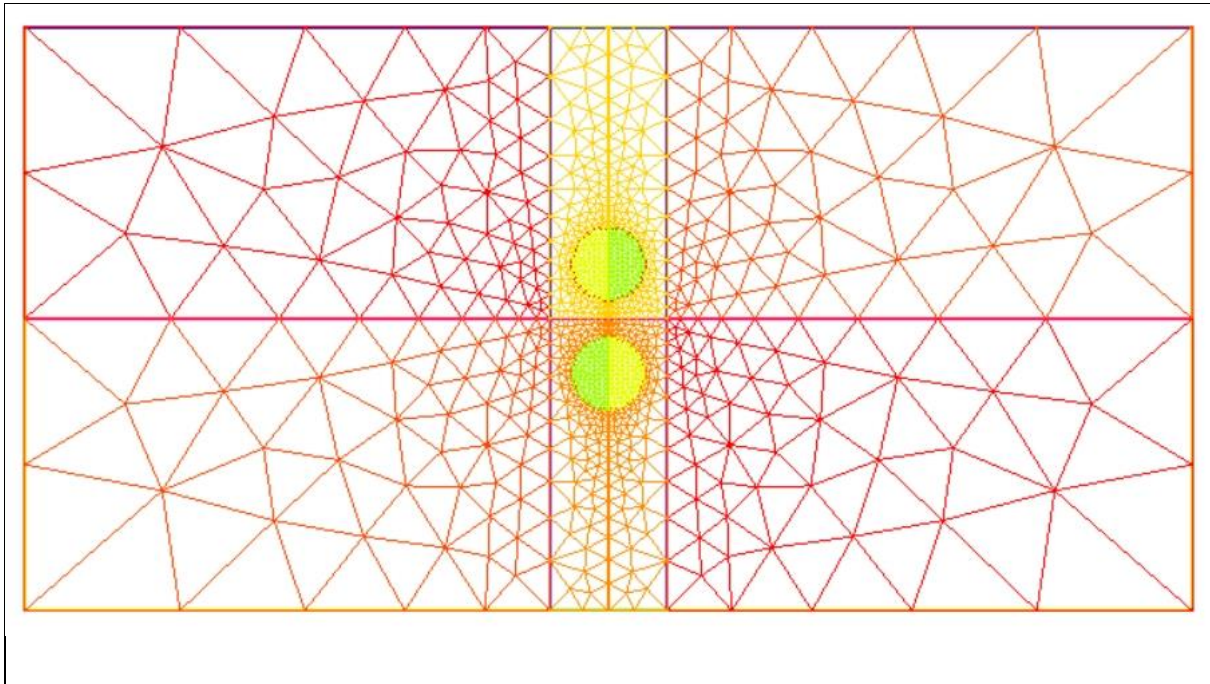


Figure 19: Maillage M4-5nW 2D de la chaussée FABAC pour la simulation de remontée de fissure par fatigue dans le plan  $x = 0$  (plan vertical contenant l'axe de symétrie transversal  $y$ ). Le maillage est constitué de deux sous-maillages distincts de part et d'autre de l'axe  $y$ . Les degrés de liberté de même nature positionnés en limites gauche et droite de cet axe et situés en dehors de l'aire fissurée sont reliés 2 à 2 entre eux, par une matrice de pénalisation afin d'assurer la continuité des champs en zone non fissurée.

*Nota : compte-tenu des symétries en  $x$ ,  $y$  du problème, les calculs pourraient être menés sur un quart du domaine  $\omega$  seulement. On préfère privilégier ici la vérification du bon déroulement des calculs, à travers l'obtention a posteriori de résultats symétriques en  $x$ ,  $y$ .*

La simulation de la remontée du front de fissure est effectuée pas à pas, en pilotant l'amplitude maximale des incréments de hauteur de fissure  $\Delta a_{fis}^{max}$  (Tableau 20).

Tableau 20 : Algorithme de pilotage des calculs de remontée de fissure, à incréments  $\Delta a_{fis}^{max}$  fixés

- Pour :
  - $N_i$  = nombre de passages d'essieux FABAC à l'issue du  $i$  – ème pas de temps
  - $\Delta N_i = N_{i+1} - N_i$  = nombre de passages d'essieux FABAC entre les pas de temps  $i$  et  $i + 1$
  - $a_{fis}(y, N_i)$  = géométrie du front de fissure au  $i$  – ème pas de temps
- Calcul de :
  - $\delta a_{fis}(y, N_i)$  = incrément du front de fissure, généré au  $i$  – ème pas de temps, par le passage d'un essieu FABAC (calcul M4-5n)

$$\circ \quad \delta a_{fis}^{max}(N_i) = \underbrace{Max}_y \delta a_{fis}(y, N_i) \quad ^{41} \quad (67)$$

- Pour la valeur  $\Delta a^{max}$  fixée, calcul de l'incrément du nombre de charges  $\Delta N_i$ , comme solution de l'équation :

$$\circ \quad \Delta a_{fis}^{max} = \Delta N_i \delta a_{fis}^{max}(N_i) \quad (68)$$

- Calcul de la nouvelle géométrie du front de fissure pour  $N = N_{i+1}$  :

$$\circ \quad a_{fis}(y, N_{i+1}) = a_{fis}(y, N_i) + N_i \delta a_{fis}(y, N_i) \quad (69)$$

La Figure 20 montre les résultats de propagation de fissure ainsi obtenus par le script FreeFem++ pour l'exemple considéré. L'incrément  $\Delta a^{max}$  est pris constant, égal à 1cm. La Figure 20 (haut) présente l'évolution de la géométrie du front au fur et à mesure du temps. La Figure du bas associe à chacun de ces profils le nombre  $N_i$  de passages d'essieu FABAC pour rendre compte de la cinétique de fatigue. Le calcul comporte 7 pas de temps allant de  $N_1 = 0$  (état initial) à  $N_7 = 4,5$  millions de cycles.

La Figure 20 (haut) rend compte de la symétrie escomptée des profils de fissuration, par rapport à l'axe longitudinal médian de la chaussée. Ceux-ci présentent une forme en M avec des *maxima* situés sous les roues et une rapide décroissance à l'extérieur des bandes de roulement ( $|y| > 30cm$ ). La remontée de fissure sous les roues apparait approximativement linéaire avec le nombre de chargements sur la plage de fissuration de 2 à 8 cm.

La Figure 21 montre les profils suivant  $y$  du terme  $g^\circ$  considéré comme moteur de fissuration dans ces calculs (cf. loi de Paris M4-5n de type 2). Ces profils ont également une forme en M au cours des premiers pas de temps, avec des *maxima* situés sous les roues. Ils évoluent ensuite vers une forme en « n » avec un léger *maximum* en axe médian de chaussée, qui ne modifie toutefois pas l'allure du front de fissure.

<sup>41</sup> La valeur  $y$  pour laquelle l'incrément  $\delta a_{fis}(y, N_i)$  est maximum est susceptible d'évoluer avec le nombre de cycles  $N_i$  et la géométrie  $a(y, N_i)$  du front de fissure

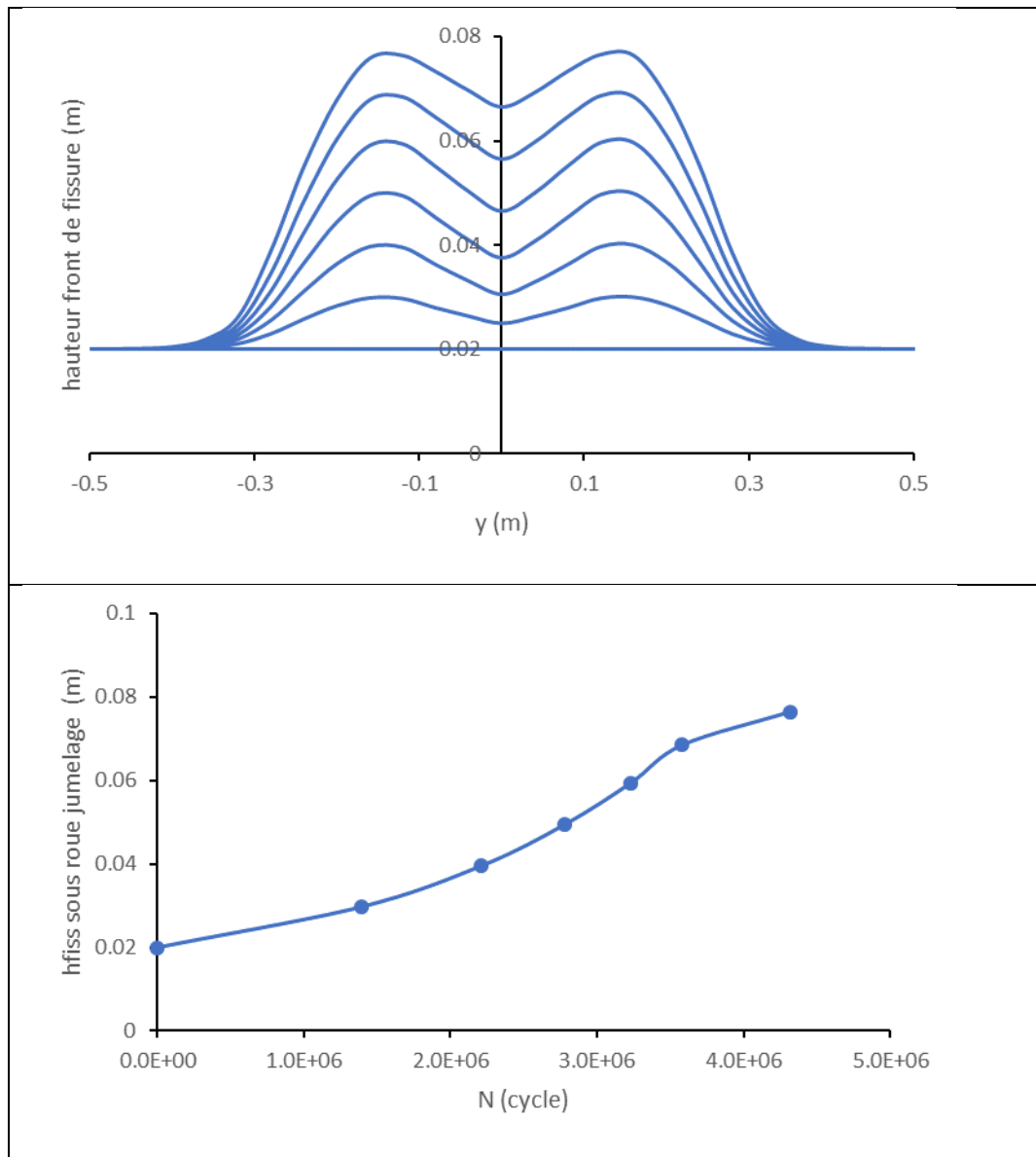


Figure 20 : Simulation M4-5n de propagation de fissure par fatigue dans la chaussée FABAC. Fig. haut : géométrie du front de fissure dans le plan vertical ( $0, y, z$ ) . La fissure est supposée démarrer d'une hauteur uniforme égale à 2 cm. Fig. bas : Cinétique de propagation de fissure en fonction du nombre de chargements FABAC (hauteur de fissure sous les roues FABAC). Les points sur cette courbe correspondent aux différents profils de la Figure du haut.

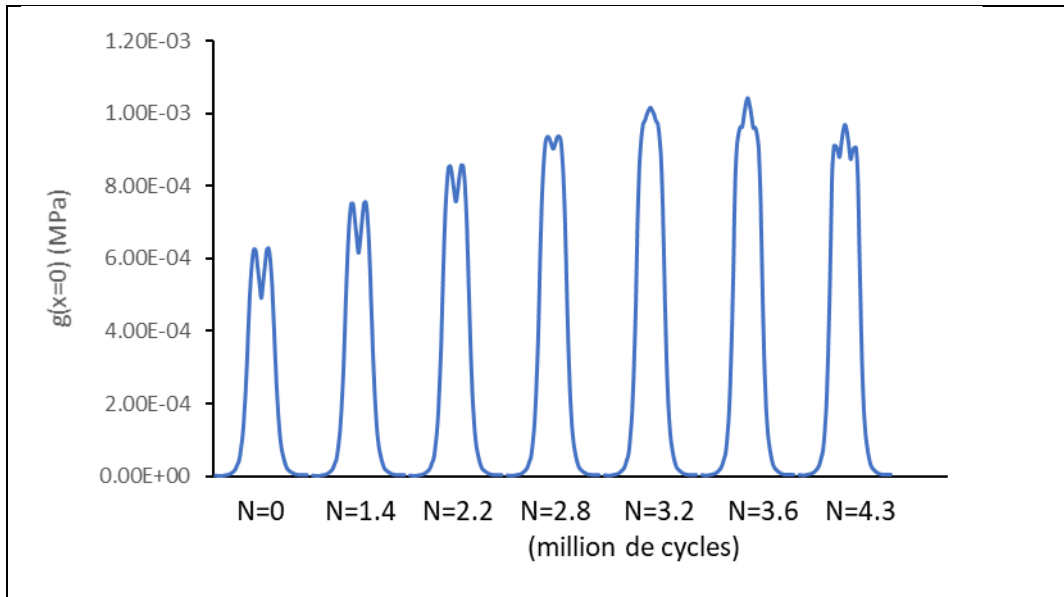


Figure 21 : Profils suivant  $y$  de la grandeur  $g^\circ$  considérée dans la loi de Paris M4-5n de type 2, utilisée dans ces calculs. Chaque courbe est tracée pour  $y$  variant sur la largeur de chaussée (échelle ramassée sur la figure). Les courbes sont indicées par leur nombre  $N_i$  de chargements correspondant.  $g^\circ$  est maximale au départ sous les roues (courbes en M). Elle devient légèrement plus élevée ensuite en axe médian de chaussée.

Les Figure 22,23 illustrent à titre d'exemple les champs de déflexion et de moment  $M_{xx}^{(1)}$  obtenus en cours de calcul au pas de temps n°4 ( $N_4 = 2,8$  millions de cycles).

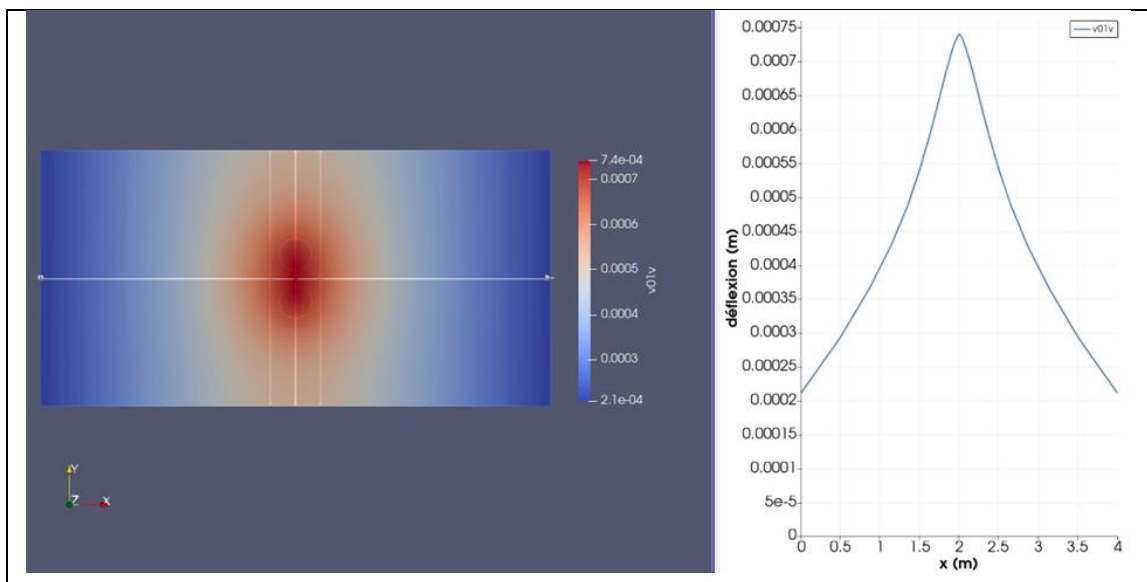


Figure 22 : Déflexion (comptée positivement) de la chaussée sous charge FABAC (4<sup>ème</sup> pas de temps, hauteur maximale de fissure de l'ordre de 5 cm) Fig.gauche : isovaleurs projetées sur le maillage M4-5n (plan horizontal  $(x, y)$ ); Fig.droite : coupe longitudinale suivant l'axe  $x$  médian. Le maximum est de l'ordre de 75 centièmes de mm (nota : sur la figure, la fissure est en  $x=2m$ )



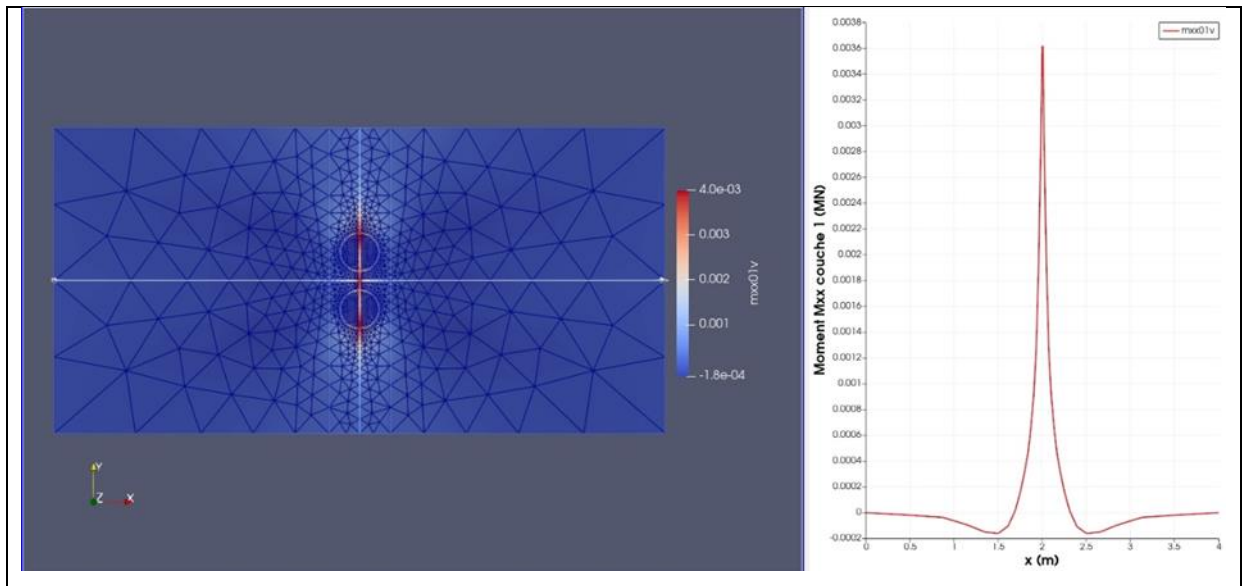


Figure 23 : Moment  $M_{xx}^{(1)}$  obtenu au pas de temps n°4 pour  $a_{fis}^{max} = 5$  cm. Fig.gauche : carte d'isovaleurs; Fig.droite : coupe longitudinale suivant l'axe  $x$  médian (nota : sur la figure, la fissure est en  $x=2m$ )

## Conclusion -Perspectives

Les travaux, présentés ici, effectués dans le cadre du thème 3 du Projet National DVDC, visent à offrir un outil de calcul numérique et d'expertise du comportement à l'échelle métrique, d'une section de chaussée comportant des défauts (fissures, surfaces de décollement).

La première partie du document, établie à l'issue de la tranche 1 de DVDC, donne une description rapide et simplifiée de la technique de modélisation M4-5n des milieux élastiques multicouches et de leur mode de résolution général par la méthode des éléments finis mixtes. On décrit également les développements spécifiques apportés en tranche 1 du PN pour la prise en compte au sein de telles structures, de fissures verticales ou surfaces de décollement sub-horizontales. Parmi ses principaux intérêts, le formalisme obtenu permet de réduire les modèles à manipuler à 2 dimensions en facilitant amplement le traitement des défauts à géométrie surfacique (fissures, décollements).

Les exemples de principe considérés dans le document montrent l'applicabilité des développements effectués à la Mécanique des Chaussées.

La seconde partie du document, établie en tranche 2 de DVDC, est tournée vers la modélisation de la propagation des fissures et surfaces de décollement sous les actions répétées de charges de trafic (routier, aéronautique). Pour ce faire, le formalisme 3D de la loi de Paris est transposé au M4-5n, en évaluant en particulier dans ce cadre les

quantités « équivalentes » aux facteurs d'intensité des contraintes 3D, usuellement utilisés comme « moteurs » de fissuration ou de décollement des couches de chaussée.

L'ensemble des développements réalisés en tranches 1 et 2 ont été implémentés sous forme de script de calcul aux éléments finis dans l'environnement Freefem++.

Un premier exemple de calcul de remontée de fissure dans une couche de chaussée bitumineuse sur support fissuré est présenté. Les simulations permettent d'obtenir l'évolution de la géométrie du front de fissuration et sa cinétique en fonction du nombre de passages de charge (en l'absence de balayage transversal dans cet exemple). Ces simulations comparées aux résultats d'un essai FABAC de fissuration permettent de réaliser un premier calage des paramètres du modèle. Les résultats numériques fournissent une estimation de l'étendue de la zone endommagée en fonction de la localisation des charges appliquées et des cycles de chargement.

Toutefois, les applications pratiques de l'outil numérique développé sont encore largement à définir et à formaliser. On peut d'ores et déjà estimer que celles-ci seront diverses par rapport aux différents besoins exprimés dans le PN (ex : aide à l'auscultation des chaussées et à l'établissement de diagnostics structurels, évaluation des effets des travaux de maintenance sur chaussées endommagées, outil d'aide à l'élaboration de guides de renforcement, aide à l'évaluation de techniques innovantes, etc.).

## Bibliographie

Le développement et les applications des modèles, dits multi-particulaires, auquel appartient la famille des M4-5n, ont donné lieu à de nombreux travaux et publications, en liaison initialement avec l'étude des matériaux composites et réalisés pour une grande part à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. Leur application aux chaussées a surtout été développée par le LCPC et l'IFSTTAR. On ne liste ci-dessous que quelques-unes de ces références.

### ***Exemples de références générales sur le modèle M4-5n***

Naciri T., Ehrlacher A., Chabot A. 1998. Interlaminar Stress Analysis with a new Multiparticle Modelisation of Multilayered Materials (M4). *Composites Science and Technology*, 58 (3): 337-343. doi: 10.1016/S0266-3538(97)00085-7

Chabot A., Ehrlacher A. (18-20 nov.) 1998, "Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches M4\_5n et M4\_(2n+1)M pour l'étude des effets de bord". *Comptes-rendus aux 11ème Journées Nationales sur les Composites (JNC11)*, Arcachon, 3: 1389-1397. Ed. AMAC, ISBN : 2-9505117-3-2

Chabot A., Cantournet S., A. Ehrlacher (15-17 novembre) 2000, "Analyse de taux de restitution d'énergie par un modèle simplifié pour un quadricouche en traction fissuré à l'interface entre 2 couches". *Comptes-rendus aux 12ème Journées Nationales sur les Composites (JNC12)*, ENS de Cachan, 2: 775-784. Ed. AMAC, ISBN 2-9515965-0-2.

Caron J. F., Diaz Diaz A., Carreira R. P., Chabot A., Ehrlacher A. 2006. Multi-particle modelling for the prediction of delamination in multi-layered materials. *Composites Science and Technology*, 66 (6): 755-765. doi: 10.1016/j.compscitech.2004.12.022

Chabot A. (April 5) 2013, Outils d'analyse du comportement mécanique de multicouches. Thèse d'Habilitation à Diriger les Recherches de l'Université de Nantes. (<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00848650>)

### **Références du domaine chaussées**

Tran Q. D., Chabot A., Ehrlacher A., Tamagny P., 2004. A simplified modelling for cracking in pavements. In Rilem Proceedings (Eds. C. Petit, I. Al-Qadi and A. Millien, PRO37-PR, ISBN 2-912143-47-0), 5th Int. RILEM Conf. Cracking in Pavements, May 5-8, Limoges, 299-306.

Chabot A., Tran Q. D., Ehrlacher A. 2005. A simplified modeling for cracked pavements / Modèle simplifié de chaussées fissurées. Bulletin des Laboratoires des Ponts et chaussées, (258-259): 105-120. ISSN 1269-1496

Chabot, A., Tran Q. D., Ehrlacher A., 2007. A modeling to understand where a vertical crack can propagate in pavements. In Taylor & Francis Group Proceedings (CRC Press ISBN: 9780415448826), Int. Conf. on Advanced Characterization of Pavement and Soil Engineering Materials, June 20- 22, Athens, Greece, 1: 431-440.

Pouteau B., Balay J.-M., Chabot A., De Larrard F., 2004. Fatigue test and mechanical study of adhesion between concrete and asphalt. 9th International Symposium on Concrete Roads, 3-6 April, Istanbul, Turkey.

Chabot A., Hun M., Hammoum, F. 2013. Mechanical analysis of a mixed mode debonding test for "composite" pavements. Construction and Building Materials, 40: 1076-1087. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2012.11.027

Nasser H., Chabot A., 2018. A Half-analytical Elastic Solution for 2D Analysis of Cracked Pavements. Advances in Engineering Software, 117: 107-122. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2017.06.008>

Nasser H., Chupin O., Piau J.M., Chabot A., 2018. Mixed FEM for solving a plate type model intended for analysis of pavements with discontinuities. Road Materials and Pavement Design, 19 (3): 496-510, doi: 10.1080/14680629.2018.1418653 (<https://doi.org/10.1080/14680629.2018.1418653>)

Chupin O., Piau JM, Chabot A., Nasser H., Nguyen ML, Lefevre Y., 2020. Layer-Wise Modeling of Cracking Scenarios in a Bituminous Pavement Tested under FABAC ALT. In Accelerated Pavement Testing to Transport Infrastructure Innovation - Proceedings of the 6th APT Conference. Chabot et al. (Eds) Springer Lecture Notes for Civil Engineering.

Nguyen, Mai Lan, Olivier Chupin, Juliette Blanc, Jean-Michel Piau, Pierre Hornych, and Yann Lefevre. 2020. "Investigation of Crack Propagation in Asphalt Pavement Based on APT Result and LEFM Analysis." Journal of Testing and Evaluation. <https://doi.org/10.1520/jte20180933>.

### **Mémoires de thèse en étroite relation avec le sujet**

Chabot A. (1997). Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de Modélisations Multiparticulaires des Matériaux Multicouches (M4). PhD thesis, ENPC, Paris. (<tel.archives-ouvertes.fr/tel-00197853/en/>)

- Tran. Q. D. (2004), Modèle simplifié pour les chaussées fissurées multicouches. Thèse de l'ENPC (ED MODES) Marne la Vallée. <https://www.theses.fr/2004ENPC0026>

- Nasser H (2016), Méthode de résolution du M4-5n par EF mixtes pour l'analyse des chaussées avec discontinuités. PhD thesis ECN (ED SPI), Nantes <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02193668>

## Annexe A1 : équations complètes du M4-5n

Dans les équations suivantes :

- $i$  est l'indice de couche
- $i, i + 1$  sont les indices de l'interface entre les couches  $i$  et  $i + 1$
- $\alpha, \beta$  sont des indices se référant aux coordonnées  $x$  ou  $y$
- $\delta_{\alpha\beta}$  est le symbole de Kronecker :  $\delta_{xx} = 1, \delta_{yy} = 1, \delta_{xy} = 0$
- $E^{(i)}, \nu^{(i)}$  sont le module d'Young et coefficient de Poisson de la couche  $n^\circ i$

Une expression en  $\alpha$  apporte 2 équations (en  $x$  et  $y$ ). Les expressions en  $\alpha\beta$  en apportent 3 ( $xx, yy, xy$ ) compte-tenu de la symétrie entre les termes  $xy$  et  $yx$ .

Par convention, la répétition des indices  $\alpha$  ou  $\beta$  ou  $k$  dans un même terme suppose leur sommation sur  $x$  et  $y$  ; ex : pour  $\alpha = x$ ,

$$N_{\alpha\beta,\beta}^{(i)} = N_{xx,x}^{(i)} + N_{xy,y}^{(i)} \quad (\text{A.1})$$

### A.1.1 Equations d'équilibre et conditions limites en effort

Equations d'équilibre pour la couche  $n^\circ i$  :

$$\bullet \quad N_{\alpha\beta,\beta}^{(i)} + \tau_{\alpha}^{(i,i+1)} - \tau_{\alpha}^{(i-1,i)} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\bullet \quad M_{\alpha\beta,\beta}^{(i)} - Q_{\alpha}^{(i)} + \frac{e^{(i)}}{2} (\tau_{\alpha}^{(i,i+1)} + \tau_{\alpha}^{(i-1,i)}) = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\bullet \quad Q_{\alpha,\alpha}^{(i)} + v^{(i,i+1)} - v^{(i-1,i)} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Conditions limites en surface de chaussée (interface (0,1)) et au niveau du sol

$$\bullet \quad \tau_x^{(0,1)} = 0 ; \tau_y^{(0,1)} = 0 \quad (\text{si absence d'effort de cisaillement en surface}) \quad (\text{A.5})$$

$$\bullet \quad \nu^{(0,1)} = -q(x, y) \quad (\text{effort normal= opposé du champ de pression } q \text{ exercé en surface de chaussée ; ex : pression uniforme sous empreinte de pneu}) \quad (\text{A.6})$$

Conditions limites au niveau du sol (interface  $(n, n + 1)$ )

- $\tau_x^{(n,n+1)} = 0, \tau_y^{(n,n+1)} = 0$  (cisaillements négligés entre sol support et couche supérieure)  
(A.7)
- $v^{(n,n+1)} = -k V_{bas}^{(n)}$  (sol de Winkler de « raideur »  $k$  ; effort normal proportionnel à la déflexion du bas de couche n°n)  
(A.8)

## A.1.2 Equations de compatibilité cinématique

Equations de compatibilité cinématique entre déplacements et déformations généralisés de la couche n°i :

$$\bullet \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)} = \frac{1}{2} (U_{\alpha,\beta}^{(i)} + U_{\beta,\alpha}^{(i)}) \quad (A.9)$$

$$\bullet \quad \chi_{\alpha\beta}^{(i)} = \frac{1}{2} (\Phi_{\alpha,\beta}^{(i)} + \Phi_{\beta,\alpha}^{(i)}) \quad (A.10)$$

$$\bullet \quad d_{\alpha}^{(i)} = \Phi_{\alpha}^{(i)} + V_{,\alpha}^{(i)} \quad (A.11)$$

Equations de compatibilité cinématique entre déplacements et déformations généralisés de l'interface n°i, i + 1 :

$$\bullet \quad D_{\alpha}^{i,i+1} = U_{\alpha}^{i+1} - U_{\alpha}^{(i)} - \frac{e^{(i)}}{2} \Phi_{\alpha}^{(i)} - \frac{e^{i+1}}{2} \Phi_{\alpha}^{i+1} \quad (A.12)$$

$$\bullet \quad D_3^{i,i+1} = V^{i+1} - V^{(i)} \quad (A.13)$$

## A.1.3 Lois de comportement

Lois de comportement entre déformations et contraintes généralisés pour la couche n°i :

$$\bullet \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)} = \frac{1}{e^{(i)}E^{(i)}} \left( (1 + \nu^{(i)}) N_{\alpha\beta}^{(i)} - \nu^{(i)} N_{kk}^{(i)} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (A.14)$$

$$\bullet \quad \chi_{\alpha\beta}^{(i)} = \frac{12}{e^{(i)}E^{(i)}} \left( (1 + \nu^{(i)}) M_{\alpha\beta}^{(i)} - \nu^{(i)} M_{kk}^{(i)} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (A.15)$$

$$\bullet \quad d_{\alpha}^{(i)} = \frac{12(1+\nu^{(i)})}{5e^{(i)}E^{(i)}} Q_{\alpha}^{(i)} - \frac{1+\nu^{(i)}}{5E^{(i)}} \left( \tau_{\alpha}^{(i)-1,i} + \tau_{\alpha}^{i,i+1} \right) \quad (A.16)$$

- Lois de comportement pour l'interface i, i + 1:

$$D_{\alpha}^{i,i+1} = -\frac{1+\nu^{(i)}}{5E^{(i)}} Q_{\alpha}^{(i)} - \frac{1+\nu^{i+1}}{5E^{i+1}} Q_{\alpha}^{i+1} - \frac{e^{(i)}(1+\nu^{(i)})}{15E^{(i)}} \tau_{\alpha}^{i-1,i} - \frac{e^{i+1}(1+\nu^{i+1})}{15E^{i+1}} \tau_{\alpha}^{i+1,i+2} \\ + \frac{4}{15} \left( \frac{e^{(i)}(1+\nu^{(i)})}{E^{(i)}} + \frac{e^{(i+1)}(1+\nu^{i+1})}{E^{i+1}} \right) \tau_{\alpha}^{i,i+1} \quad (\text{A.17})$$

$$D_3^{(i,i+1)} = \frac{9e^{(i)}}{70E^{(i)}} v^{(i-1,i)} + \frac{9e^{(i+1)}}{70E^{(i+1)}} v^{(i+1,i+2)} + \frac{13}{35} \left( \frac{e^{(i)}}{E^{(i)}} + \frac{e^{(i+1)}}{E^{(i+1)}} \right) v^{(i,i+1)} \quad (\text{A.18})$$

### A.1.4 Densités d'énergie élastique de contrainte attachées aux lois de comportement

- Densité d'énergie élastique des efforts de membrane et flexion

$$w_c^{(i)} = \frac{1}{2} \left( N_{\alpha\beta}^{(i)} \frac{1}{e^{(i)}} S_{\alpha\beta\delta\gamma}^{(i)} N_{\delta\gamma}^{(i)} + M_{\alpha\beta}^{(i)} \frac{12}{e^{(i)^3} S_{\alpha\beta\delta\gamma}^{(i)}} M_{\delta\gamma}^{(i)} \right) \quad (\text{A.19})$$

- Densité d'énergie élastique des efforts tranchants

$$w_Q^{(i)} = \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} & Q_{\alpha}^{(i)} \frac{1}{e^{(i)}} \tilde{S}_{\alpha\beta}^{(i)} Q_{\beta}^{(i)} + \left( \tau_{\alpha}^{(i,i+1)} - \tau_{\alpha}^{(i-1,i)} \right) \frac{e^{(i)}}{12} \tilde{S}_{\alpha\beta}^{(i)} \left( \tau_{\beta}^{(i,i+1)} - \tau_{\beta}^{(i-1,i)} \right) \\ & + \left( Q_{\alpha}^{(i)} - \frac{e^{(i)}}{2} \left( \tau_{\alpha}^{(i,i+1)} + \tau_{\alpha}^{(i-1,i)} \right) \right) \frac{1}{5e^{(i)}} \tilde{S}_{\alpha\beta} \left( Q_{\beta}^{(i)} - \frac{e^{(i)}}{2} \left( \tau_{\beta}^{(i,i+1)} + \tau_{\beta}^{(i-1,i)} \right) \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.20})$$

- Densité d'énergie élastique des efforts d'arrachement

$$w_v^{(i)} = \frac{e^{(i)}}{8E^{(i)}} \left[ \left( v^{(i,i+1)} + v^{(i-1,i)} \right)^2 + \frac{17}{35} \left( v^{(i,i+1)} - v^{(i-1,i)} \right)^2 \right] \quad (\text{A.21})$$

avec  $S_{\alpha\beta\delta\gamma}^i, \tilde{S}_{\alpha\beta}$  tenseurs de souplesse membranaire et de cisaillement, donnés par:

$$S_{\alpha\beta\delta\gamma}^{(i)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E^{(i)}} & -\frac{\nu^{(i)}}{E^{(i)}} & 0 \\ -\frac{\nu^{(i)}}{E^{(i)}} & \frac{1}{E^{(i)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G^{(i)}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

$$\tilde{S}_{\alpha\beta}^{(i)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{G^{(i)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G^{(i)}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

## A.2 Lagrangien et formulation variationnelle associés à la résolution du M4-5n par méthode d'éléments finis mixtes

$$\begin{aligned} L(\Sigma, U) = & - \int_{\omega} w_{elas} d\omega + \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ U_{\alpha,\beta}^{(i)} N_{\alpha\beta}^{(i)} - U_{\alpha}^{(i)} \left( \tau_{\alpha}^{(i,i+1)} - \tau_{\alpha}^{(i-1,i)} \right) + \Phi_{\alpha,\beta}^{(i)} M_{\alpha\beta}^{(i)} - \right. \\ & \left. \Phi_{\alpha}^{(i)} \left( -Q_{\alpha}^{(i)} + \frac{e^{(i)}}{2} \left( \tau_{\alpha}^{(i,i+1)} + \tau_{\alpha}^{(i-1,i)} \right) \right) + V_{\alpha}^{(i)} Q_{\alpha}^{(i)} - V^{(i)} \left( v^{(i,i+1)} - v^{(i-1,i)} \right) \right] d\omega - \\ & \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_U^{(i)}} \left[ U_{\alpha}^{(i)} \left( N_{\alpha\beta}^{(i)} n_{\beta}^{(i)} \right) + \Phi_{\alpha}^{(i)} \left( M_{\alpha\beta}^{(i)} n_{\beta}^{(i)} \right) + V^{(i)} \left( Q_{\alpha}^{(i)} n_{\alpha} \right) \right] ds \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

avec :  $n$  = nombre de couches

En utilisant les expressions des déformations généralisées (et en supposant par exemple  $\tau_x^{(0,1)} = 0$ ,  $\tau_y^{(0,1)} = 0$ ,  $v^{(0,1)} = -q(x, y)$ ,  $\tau_x^{(n,n+1)} = 0$ ,  $\tau_y^{(n,n+1)} = 0$ ,  $v^{(n,n+1)} = 0$ ) on peut également écrire :

$$\begin{aligned} L(\Sigma, U) = & - \int_{\omega} (w_{elas} + V^{(1)} q) d\omega + \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ \varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)} N_{\alpha\beta}^{(i)} + \chi_{\alpha\beta}^{(i)} M_{\alpha\beta}^{(i)} + d_{\alpha}^{(i)} Q_{\alpha}^{(i)} \right] d\omega + \\ & \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\omega} \left[ \tau_{\alpha}^{(i,i+1)} D_{\alpha}^{(i,i+1)} + v^{(i,i+1)} D_3^{(i,i+1)} \right] d\omega - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_U^{(i)}} \left[ U_{\alpha}^{(i)} \left( N_{\alpha\beta}^{(i)} n_{\beta}^{(i)} \right) + \Phi_{\alpha}^{(i)} \left( M_{\alpha\beta}^{(i)} n_{\beta}^{(i)} \right) + \right. \\ & \left. V^{(i)} \left( Q_{\alpha}^{(i)} n_{\alpha} \right) \right] ds \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

## A.3 Typologie des solutions M4-5n en un point singulier et conditions de bord en front de fissure ou surface de décollement.

On appelle ici « point singulier » d'une structure M4-5n un point situé sur le front d'une fissure verticale ou sur le contour d'une surface de décollement. On note  $(n_x, n_y)$  les composantes du vecteur unitaire sortant en ce point.

L'analyse au sens des distributions des équations cinématiques et d'équilibre du M4-5n en un point courant livrent les conditions de régularité à vérifier sur les contraintes généralisées en un tel point singulier  $S$ . De manière générale, elles impliquent pour toutes les couches la continuité des vecteurs contraintes,

$(N_{xx}^{(i)} n_x + N_{xy}^{(i)} n_y, N_{xy}^{(i)} n_x + N_{yy}^{(i)} n_y, M_{xx}^{(i)} n_x + M_{xy}^{(i)} n_y, M_{xy}^{(i)} n_x + M_{yy}^{(i)} n_y, Q_x^{(i)} n_x + Q_y^{(i)} n_y)$   
suivant la direction  $(n_x, n_y)$ .

Dans le cas d'une fissure traversant la couche n°i, les composantes n°i sont par ailleurs nulles de part et d'autre de la fissure.

L'examen des équations montrent également qu'au droit d'un point singulier les contraintes d'arrachement  $v^{i,i+1}$  sont continues, sans qu'il soit nécessaire de tenir compte explicitement de cette condition dans la résolution des problèmes.

En revanche l'effort de cisaillement  $(\tau_x^{i,i+1}, \tau_y^{i,i+1})$  est susceptible de subir un saut au niveau du point  $S$ . Dans le cas d'une fissure, les 2 valeurs de part et d'autre de ce point découlent de la résolution d'ensemble du problème (cas de fissure). Dans le cas d'un décollement, les composantes  $(\tau_x^{i,i+1}, \tau_y^{i,i+1})$  sont à imposer, égales à 0 du côté du point  $S^+$  situé sur la surface de décollement, les valeurs au point  $S^-$  résultant du calcul.

Selon le fonctionnement pressenti *a priori* de la surface de décollement (mode ouvert ou fermé) la contrainte d'arrachement sera imposée nulle (si ouverture) ou laissée libre. On devra s'assurer *a posteriori* de la cohérence des résultats avec l'hypothèse choisie, soit :

- vérification de l'ouverture de l'aire décollée, à partir des déplacements verticaux de ses lèvres, si hypothèse  $v^{i,i+1} = 0$  ;
- vérification d'un état de contrainte normale en compression (valeur de signe négatif), si hypothèse de glissement sans décollement.

En résumé, les conditions mécaniques à imposer explicitement au droit d'un point singulier, avec dédoublement de contour, sont les suivantes :

- Cas d'une fissure
  - continuité des vecteurs contraintes et des déplacements sur toute couche non fissurée
  - vecteur contrainte nul sur les 2 bords de la couche fissurée
  - déplacements laissés libres sur cette couche
- Cas d'un décollement
  - continuité des vecteurs contraintes et des déplacements dans toute couche
  - cisaillements d'interface nuls du côté de la surface de décollement
  - selon, le fonctionnement pressenti de l'aire décollée, valeur de  $v^{i,i+1}$  imposée nulle (si décollement) ou laissée libre (si glissement sous état de compression normale).



## A.4 Principe du Travail Virtuel en théorie M4-5n

On considère une structure M4-5n de domaine  $\omega$  soumise au champ de contrainte généralisé  $\Sigma$ , en équilibre avec une distribution d'efforts extérieurs  $\bar{F}$  pouvant éventuellement s'exercer au niveau des couches de la structure. On considère également les champs de déplacement et de déformation généralisés « virtuels »  $\hat{U}$  et  $\hat{\varepsilon}$  définis sur  $\omega$ .  $\hat{U}$  et  $\hat{\varepsilon}$  sont supposés associés au travers des équations de compatibilité cinématique. En revanche les champs de contrainte  $\Sigma$  et  $\hat{\varepsilon}$  ne sont pas nécessairement reliés au travers des lois de comportement du M4-5n.

On peut alors établir pour les champs  $(\Sigma, \hat{\varepsilon})$  et  $(\bar{F}, \hat{U})$  une relation identique au Principe du Travail Virtuel (PTV) de la Mécanique des Milieux Déformables (en petites déformations 3D).

Avant d'énoncer celui-ci, étendons les équations d'équilibre du M4-5n à la présence éventuelle d'efforts extérieurs à l'intérieur des couches de la structure. Cette extension nous sera utile pour la prise en compte du champ de contraintes  $\delta\Sigma$  induit par propagation de fissure dans le modèle (F).

### A4.1 Equations d'équilibre en présence d'efforts extérieurs surfaciques

Les équations d'équilibre de la section A.1.1 peuvent être facilement étendues au cas de la présence d'efforts intra-couches, éventuellement nuls, sous la forme :

$$\bullet N_{\alpha\beta,\beta}^{(i)} + \tau_{\alpha}^{(i,i+1)} - \tau_{\alpha}^{(i-1,i)} + \bar{N}_{\alpha}^{(i)} = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\bullet M_{\alpha\beta,\beta}^{(i)} - Q_{\alpha}^{(i)} + \frac{e^{(i)}}{2} (\tau_{\alpha}^{(i,i+1)} + \tau_{\alpha}^{(i-1,i)}) + \bar{M}_{\alpha}^{(i)} = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$\bullet Q_{\alpha,\alpha}^{(i)} + v^{(i,i+1)} - v^{(i-1,i)} + \bar{Q}^{(i)} = 0 \quad (\text{A.28})$$

où  $\bar{N}_{\alpha}^{(i)}, \bar{M}_{\alpha}^{(i)}, \bar{Q}^{(i)}$  sont des distributions surfaciques d'efforts généralisés, ramenées au niveau des plans médians des couches. Ces quantités, connues *a priori*, sont supposées ne dépendre que des variables  $(x, y)$ . Elles peuvent éventuellement résulter d'efforts volumiques intégrés sur l'épaisseur des couches (ex :  $\bar{Q}^{(i)} = e^{(i)}\gamma^{(i)}$  = poids surfacique de la couche  $i$ , égal au produit du poids volumique de la couche multiplié par son épaisseur).

Ce système de force, ajouté aux forces extérieures  $\bar{\tau}_x^{(0,1)}, \bar{\tau}_y^{(0,1)}, \bar{v}^{(0,1)}$  appliquées en surface du M4-5n, peut être noté  $\bar{F}$  dans son ensemble.

On suppose dans la suite que le champ  $\Sigma$ , en équilibre avec un tel système de forces, vérifie ces équations.

*Nota : de façon plus générale, on pourrait également considérer des distributions surfaciques d'efforts « extérieurs » s'exerçant au niveau des interfaces entre couches du M4-5n.*

## A4.2 Principe du Travail Virtuel pour M4-5n

A partir des équations d'équilibre ci-dessus et des équations cinématiques du M4-5n, il est facile d'établir en recourant à des intégrations par parties sur le domaine  $\omega$ , l'égalité des deux quantités suivantes :

$$\int_{\omega} \widehat{\varepsilon} \Sigma d\omega = \int_{\omega} \widehat{U} \bar{F} d\omega \quad (\text{A.29})$$

avec :

$$\int_{\omega} \widehat{\varepsilon} \Sigma d\omega = \int_{\omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)} N_{\alpha\beta}^{(i)} + \chi_{\alpha\beta}^{(i)} M_{\alpha\beta}^{(i)} + d_{\alpha}^{(i)} Q_{\alpha}^{(i)} \right] + \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \tau_{\alpha}^{(i,i+1)} D_{\alpha}^{(i,i+1)} + \nu^{(i,i+1)} D_3^{(i,i+1)} \right] \right\} d\omega \quad (\text{A.30})$$

et :

$$\int_{\omega} \widehat{U} \bar{F} d\omega = - \int_{\omega} \left( U_x^{(1)} \bar{\tau}_x^{(0,1)} + U_y^{(1)} \bar{\tau}_y^{(0,1)} + V^{(1)} \bar{\nu}^{(0,1)} \right) d\omega + \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \left[ U_{\alpha}^{(i)} \bar{N}_{\alpha}^{(i)} + \Phi_{\alpha}^{(i)} \bar{M}_{\alpha}^{(i)} + V^{(i)} \bar{Q}^{(i)} \right] d\omega \quad (\text{A.31})$$

*Nota : pour simplifier les écritures, on s'est placé ici dans le cas où le produit  $\widehat{U} \bar{F}$  est nul sur le bord  $\partial\omega$ .*

Dans l'Equation A.31, l'intégrale de gauche représente le travail sur l'ensemble de la structure M4-5n, des contraintes généralisées dans le champ de déformation  $\widehat{\varepsilon}$  tandis que l'intégrale de droite représente le travail des efforts extérieurs dans le champ de déplacement  $\widehat{U}$ . Cette relation est ainsi équivalente en théorie M4-5n au PTV de la Mécanique des Milieux Continus.

*Nota : remarquer que l'intégrale  $\int_{\omega} \left( U_x^{(1)} \bar{\tau}_x^{(0,1)} + U_y^{(1)} \bar{\tau}_y^{(0,1)} + V^{(1)} \bar{\nu}^{(0,1)} \right) d\omega$  fait intervenir le produit d'efforts  $\bar{\tau}_x^{(0,1)}, \bar{\tau}_y^{(0,1)}, \bar{\nu}^{(0,1)}$  et déplacements  $U_x^{(1)}, U_y^{(1)}, V^{(1)}$  définis en des cotes distinctes.*

## A4.3 Application au calcul de l'intégrale $\int_{\omega} \varepsilon \delta \Sigma d\omega$

Appliquons le Principe précédent au calcul des intégrales  $\int_{\omega} \varepsilon \delta \Sigma d\omega$  mises en jeu dans la détermination des taux de restitution d'énergie élastique par fissuration de couche ou délamination d'interface. Evaluons en premier lieu pour ces deux cas les efforts  $\delta \bar{N}_{\alpha}^{(i)}, \delta \bar{M}_{\alpha}^{(i)}, \delta \bar{Q}^{(i)}$  associés aux variations de contraintes généralisées  $\delta \Sigma$ .

*Cas du modèle (F) avec remontée de fissure distribuée entre les couches  $n^{\circ} i - 1$  et  $i$*

Soit  $\Sigma$  le champ de contrainte, solution du problème (F). Par différentiation des équations d'équilibre (A.2), (A.3), (A.4) auxquelles il satisfait, on obtient en considérant les épaisseurs  $e^{(i-1)}, e^{(i)}$  variables:

- $\delta N_{\alpha\beta}^{(j)} + \delta\tau_{\alpha}^{(j,j+1)} - \delta\tau_{\alpha}^{(j-1,j)} = 0$  pour l'ensemble des couches :  $j = 1, \dots, i-1, i, \dots, n$  (A.32)

- $\delta M_{\alpha\beta}^{(j)} - \delta Q_{\alpha}^{(j)} + \frac{e^{(j)}}{2} (\delta\tau_{\alpha}^{(j,j+1)} + \delta\tau_{\alpha}^{(j-1,j)}) = 0$  pour les couches  $j$  différentes de  $i-1$  et  $i$  (A.34)

- $\delta M_{\alpha\beta}^{(i)} - \delta Q_{\alpha}^{(i)} + \frac{e^{(i)}}{2} (\tau_{\alpha}^{(i,i+1)} + \tau_{\alpha}^{(i-1,i)}) + \frac{\delta e^{(i)}}{2} (\tau_{\alpha}^{(i,i+1)} + \tau_{\alpha}^{(i-1,i)}) = 0$  (A.35)

- $\delta Q_{\alpha,\alpha}^{(j)} + \delta v^{(j,j+1)} - \delta v^{(j-1,i)} = 0$  pour l'ensemble des couches (A.36)

Par ailleurs, la différentiation s'effectuant à efforts  $\bar{\tau}_x^{(0,1)}, \bar{\tau}_y^{(0,1)}, \bar{v}^{(0,1)}$  fixés, on a également :

$$\delta \bar{\tau}_x^{(0,1)} = 0 \quad \delta \bar{\tau}_y^{(0,1)} = 0 \quad \delta \bar{v}^{(0,1)} = 0 \quad (A.37)$$

Dans leur ensemble, ces équations sont similaires aux équations d'équilibre du M4-5n pour des efforts extérieurs nuls, hormis pour les moments  $\delta M_{\alpha\beta}^{(i-1)}, \delta M_{\alpha\beta}^{(i)}$  qui apparaissent en équilibre avec les « efforts extérieurs » :

$$\delta \bar{M}_{\alpha}^{(i-1)} = \frac{\delta e^{(i-1)}}{2} (\tau_{\alpha}^{(i-2,i-1)} + \tau_{\alpha}^{(i-1,i)}) \quad (A.38)$$

$$\delta \bar{M}_{\alpha}^{(i)} = \frac{\delta e^{(i)}}{2} (\tau_{\alpha}^{(i,i+1)} + \tau_{\alpha}^{(i-1,i)}) \quad (A.39)$$

Des Equations (A.31) , (A.37) on en déduit :

$$\int_{\omega} \mathcal{E} \delta \Sigma d\omega = \int_{\omega} (\Phi_{\alpha}^{(i-1)} \delta \bar{M}_{\alpha}^{(i-1)} + \Phi_{\alpha}^{(i)} \delta \bar{M}_{\alpha}^{(i)}) d\omega$$

soit encore compte tenu de (A.38),(A.39) et des relations  $\delta e^{(i)}(y) = -\delta e^{(i-1)}(y) = \delta a_{fis}(y)$  :

$$\int_{\omega} \mathcal{E} \delta \Sigma d\omega = \frac{1}{2} \int_{\omega} (\Phi_{\alpha}^{(i)} (\tau_{\alpha}^{(i,i+1)} + \tau_{\alpha}^{(i-1,i)}) - \Phi_{\alpha}^{(i-1)} (\tau_{\alpha}^{(i-2,i-1)} + \tau_{\alpha}^{(i-1,i)})) \delta a_{fis} d\omega \quad (A.40)$$

*Cas du modèle (D) avec délamination d'interface*

$$\int_{\omega} \varepsilon \delta \Sigma d\omega =$$
$$\int_{\partial\omega_{fis}} \left( (U_x^{(i)} - U_x^{(i+1)}) \llbracket \bar{t}_x^{(i,i+1)} \rrbracket + (U_y^{(i)} - U_y^{(i+1)}) \llbracket \bar{t}_y^{(i,i+1)} \rrbracket - (V^{(i)} - V^{(i+1)}) \llbracket \bar{v}^{(i,i+1)} \rrbracket \right) \delta a_{fis} ds$$

(A.41)